



# Analyse 2-microlocale et application au débruitage

Antoine Echelard

## ► To cite this version:

Antoine Echelard. Analyse 2-microlocale et application au débruitage. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2007. Français. NNT: . tel-00283008

**HAL Id: tel-00283008**

**<https://theses.hal.science/tel-00283008>**

Submitted on 28 May 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Centrale de Nantes

Université de Nantes

École Doctorale

SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DE L'INFORMATION ET DES MATÉRIAUX

Année 2006

Thèse de DOCTORAT

# Analyse 2-microlocale et application au débruitage

Diplôme délivré conjointement par  
l'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes

Spécialité :

Automatique et Informatique Appliquée

Présentée et soutenue publiquement par

**Antoine ECHELARD**

le 28 Novembre 2007

à l'École Centrale de Nantes

JURY :

<b>Directeur</b>	: Jacques Levy-Vehel	Directeur de recherche, IRCCyN
<b>Co-directeur</b>	: Ina Taralova	Maître de conférences, IRCCyN
<b>Président</b>	: Antoine AYACHE	Professeur, Université Lille 1
<b>Rapporteurs</b>	: Antoine AYACHE	Professeur, Université Lille 1
	Claude TRICOT	Professeur, Université Blaise Pascal,
<b>Examineurs</b>	: Dominique PICARD	Professeur, Université Paris VII
	Ronald COIFMAN	Professeur, Math. Dept. Yale University



# Remerciements

Je tiens à remercier chaleureusement mon directeur de thèse Jacques Levy-Véhel pour son encadrement d’une grande qualité, ainsi qu’Ina Taralova pour ses nombreux conseils avisés et pertinents.

Je suis très honoré de l’intérêt qu’ont porté à mon travail Claude Tricot, Antoine Ayache, Dominique Picard, Anne Philippe et Ronald Coifman. Je tiens en particulier à remercier Claude Tricot pour les discussions très enrichissantes que j’ai pu avoir avec lui lors de ces trois années.

Franck Sobolewski et Sophie Breau de l’Inria Surgères ont fourni les données numériques ayant permis la rédaction du sixième chapitre de cet ouvrage et ont toujours fait preuve d’une grande disponibilité à mon égard. Je leur en suis grandement reconnaissant.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à tous ceux avec qui j’ai été en contact à l’Ircyn, en particulier Adama, Christian, Pierrick et Olivier, dont l’aide pour les formalités de soutenance m’a été d’un grand secours.

Ma famille, par son soutien constant et mes amis de longue date, Alexandre, Boris, Matthieu, Michael et Nicolas, par les très agréables moments et les débats acharnés que j’ai partagés avec eux, ont fait de ces années une période riche sur le plan personnel. Charlène a éclairé de sa présence et de son attention mon travail de recherche, et je l’en remercie.

# Table des matières

<b>Chapitre 1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Chapitre 2</b>	<b>Rappels sur les espaces 2-microlocaux</b>	<b>5</b>
2.1	Décomposition de Littlewood-Paley	5
2.1.1	Définition globale	5
2.1.2	Définition locale des espaces 2-microlocaux	8
2.2	La frontière 2-microlocale	9
2.2.1	Le domaine 2-microlocal	10
2.2.2	Définition de la frontière 2-microlocale	11
2.2.3	Propriétés de la frontière 2-microlocale	12
2.2.4	Frontière 2-microlocale et exposants de régularité	12
2.3	Caractérisations en ondelettes des espaces 2-microlocaux	14
2.3.1	Caractérisation en ondelettes continues	15
2.3.2	Caractérisation en ondelettes discrètes	15
2.4	Conclusion	16
<b>Chapitre 3</b>	<b>Une approche temporelle de l'analyse 2-microlocale</b>	<b>17</b>
3.1	Rappels sur les exposants de régularité Hölderienne	18
3.1.1	Exposant de Hölder ponctuel	18
3.1.2	Exposant de Hölder local	23
3.1.3	“Insuffisance” des deux exposants	28
3.2	Caractérisation en temps des espaces 2-microlocaux	29
3.2.1	Caractérisation pour $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$	29
3.2.2	Caractérisation pour $s$ et $\sigma$ positifs	33
3.2.3	Effet d’une multiplication par $x$ ou d’une intégration	35
3.2.4	Propriétés des espaces 2-microlocaux	38
3.2.5	Frontières 2-microlocales partielles	43
3.3	Le spectre 2-microlocal temporel	46
3.3.1	Définition	47
3.3.2	Propriétés	49
3.3.3	Formalisme 2-microlocal temporel	51
3.3.4	Quelques exemples de spectres 2-microlocaux	52
3.3.5	Estimations numériques	60

<b>Chapitre 4</b>	<b>Un parallèle entre formalisme 2-microlocal et formalisme multifractal . . . . .</b>	<b>66</b>
4.1	Introduction . . . . .	66
4.2	Notions générales . . . . .	66
4.2.1	Cadre commun . . . . .	66
4.2.2	Forme particulière de $F$ . . . . .	69
4.3	Analyse multifractale . . . . .	71
4.3.1	Introduction . . . . .	71
4.3.2	Notations . . . . .	72
4.3.3	Formalisme multifractal discret . . . . .	73
4.3.4	Formalisme multifractal continu . . . . .	80
4.3.5	Application de la section 4.2.2 . . . . .	82
4.4	Application au spectre microlocal : formalisme 2-microlocal . . . .	86
4.4.1	Formalisme 2-microlocal continu . . . . .	86
4.4.2	Formalisme 2-microlocal discret . . . . .	90
4.5	Prescription des spectres . . . . .	91
4.5.1	Cadre général . . . . .	91
4.5.2	Spectre multifractal . . . . .	94
4.5.3	Spectre 2-microlocal . . . . .	98
<b>Chapitre 5</b>	<b>Débruitage . . . . .</b>	<b>100</b>
5.1	Introduction . . . . .	100
5.1.1	Rappels sur le débruitage . . . . .	100
5.1.2	Quelques méthodes de débruitage par ondelettes . . . . .	100
5.1.3	Limites du débruitage par seuillage . . . . .	105
5.1.4	Approche choisie . . . . .	106
5.2	Exposant “entre deux échelles” . . . . .	109
5.2.1	Cas d’une fonction unique . . . . .	109
5.2.2	Cas d’une suite de fonctions . . . . .	111
5.3	Estimation de la régularité du signal échantillonné . . . . .	112
5.3.1	Echantillonnage “impulsionnel” . . . . .	113
5.3.2	Echantillonnage “intégral” . . . . .	119
5.4	Estimation de la régularité d’un signal bruité . . . . .	119
5.5	Estimation de la régularité de signaux obtenus par seuillage . . .	122
5.5.1	Effet d’un seuillage en $2^{-n/2}\sqrt{2n \ln 2}$ . . . . .	122
5.5.2	Effet d’un seuillage en $2^{-j\delta}$ . . . . .	128
5.6	Estimation de l’échelle de coupure dans un signal bruité . . . . .	134
5.7	Une nouvelle méthode de débruitage fondée sur les ondelettes et sur la régularité locale . . . . .	148
5.7.1	Principe . . . . .	148
5.7.2	Applications numériques . . . . .	151
5.8	Extension à l’analyse 2-microlocale . . . . .	153
5.8.1	Préliminaires . . . . .	153

5.8.2	Effet d'un seuillage en $2^{-n/2}\sqrt{2n \ln 2}$	161
5.8.3	Effet d'un seuillage en $2^{-j\delta}$	165
5.9	Débruitage en un point	166
5.9.1	Etude théorique	166
5.9.2	Applications numériques	172
<b>Chapitre 6 Application d'outils fractals à l'analyse d'images de</b>		
	<b>beurre</b>	<b>179</b>
6.1	Introduction	179
6.2	Matériel et méthodes	180
6.3	Présentation des outils fractals	181
6.3.1	Dimension de boîte	181
6.3.2	Dimension de régularisation	183
6.3.3	Lacunarité	183
6.3.4	Norme de Besov	184
6.4	Analyse et discussion	184
6.4.1	Evolution de la dimension de boîte avec la maturation	185
6.4.2	Evolution de la dimension de régularisation avec la maturation du beurre	186
6.4.3	Séparation des types de beurre avec la lacunarité	187
6.4.4	Norme de Besov et site de production	187
6.5	Conclusion	189
<b>Chapitre 7 Conclusion et perspectives</b>		<b>190</b>
<b>Chapitre 8 Bibliographie</b>		<b>192</b>

# Chapitre 1

## Introduction

Les applications de l'analyse de régularité en traitement du signal se font de plus en plus nombreuses, dans des domaines aussi variés que le traitement d'image [PPL02, Lév97, TP00, Aka, DTL<sup>+</sup>06], la médecine et la biologie [MSK03], l'étude du trafic sur Internet [BL04, MN97, Nor97, LTWW94] ou l'architecture [Wol04].

L'analyse de régularité globale, dont l'outil le plus classique est l'exposant de Hölder, est adaptée à l'analyse de signaux dont la régularité est homogène. Ce type d'outil se révèle néanmoins inadéquat lorsqu'il s'agit d'analyser des signaux dont la régularité varie.

La mécanique des fluides est un des premiers domaines où la présence de variations rapides et localisées de la régularité a été mise en évidence. Ainsi, l'hétérogénéité de la dissipation d'énergie dans un écoulement turbulent a conduit à introduire les cascades multiplicatives aléatoires, qui constituent le premier modèle multifractal [Man74a, GU85].

L'étude de tels modèles nécessite des outils permettant de caractériser leur comportement en un point. L'exposant de Holder ponctuel d'une fonction  $f$  au point  $x_0$ ,  $\alpha_p(f, x_0)$  est un des premiers utilisés. L'analyse multifractale [FP85, AP96, BMP92, CLP87, EM92, Fan97, HJK<sup>+</sup>86, KP76, Jaf97a, LVT04, LVV98, Man74b, Ols95] étudie la structure de la fonction  $x_0 \rightarrow \alpha_p(f, x_0)$  et définit le spectre multifractal, qui caractérise les lignes de niveau de cette fonction. Le calcul théorique et numérique de ce spectre étant difficile, les physiciens et les mathématiciens ont étudié le "formalisme multifractal", qui permet dans certains cas de calculer le spectre comme la transformée de Legendre d'une fonction plus simple à obtenir [BMP92, FP85].

Au lieu de se fonder sur l'exposant de Hölder ponctuel et d'en étudier finement la structure comme le fait l'analyse multifractale, on peut essayer de caractériser la régularité locale d'une fonction en utilisant d'autres exposants : on peut



citer l'exposant de Hölder local [GL98], l'exposant de chirp [Mey98], l'exposant d'oscillations [AAM98] ou l'exposant "weak scaling" [Mey98].

La frontière 2-microlocale, définie dans [GL98, Mey98] à partir de la version locale des espaces 2-microlocaux introduits par J.M. Bony dans [Bon83], permet d'avoir un point de vue très général sur ces exposants. A chaque point du domaine de définition est associée une courbe qui caractérise de façon très complète la régularité de la fonction en ce point, et qui contient en particulier l'information donnée par les exposants de régularité. Les espaces 2-microlocaux, définis initialement par une décomposition de Littlewood-Paley, ont été caractérisés en termes d'ondelettes dans [Jaf91]. Une caractérisation partielle dans le domaine temporel de ces espaces a été donnée dans [KL02] et un cas plus général a été traité dans [SL03]. Voir également [Mey98] pour des résultats similaires.

Le calcul de la frontière 2-microlocale est délicat numériquement. Le formalisme 2-microlocal a été défini dans [GL98, LS04], par une démarche analogue à celle du formalisme multifractal : en un point  $x_0$  fixé, la frontière 2-microlocale est la transformée de Legendre d'une fonction définie à partir des coefficients d'ondelettes et appelée spectre 2-microlocal. Le spectre 2-microlocal rend compte des ordres de grandeur des coefficients d'ondelettes suivant certaines courbes du plan temps-échelle. Il fournit ainsi une interprétation de la frontière en termes de localisation des coefficients d'ondelettes dans ce plan. De plus, les exposants de régularité peuvent être écrits en termes de spectres 2-microlocaux.

Le plan de cette thèse est le suivant :

Dans une première partie, nous rappelons la définition originale des espaces 2-microlocaux tels qu'ils ont été introduits dans [Bon83], leur caractérisation en termes d'ondelettes, et les propriétés de la frontière 2-microlocale.

Dans la deuxième partie, nous donnons une forme "temporelle" sous laquelle peuvent être caractérisés les espaces 2-microlocaux pour  $\{(s, \sigma - s) \in \mathbb{R}_+^* - \mathbb{N}\}^2$ , qui étend les résultats de [SL03]. Cette forme permet de considérer ces espaces comme une généralisation naturelle des espaces de Hölder ponctuels et locaux. Nous montrons de plus les propriétés des espaces 2-microlocaux de manière directe à partir de cette expression et sans passer dans le plan temps-échelle. Enfin, nous introduisons un "formalisme 2-microlocal en temps" : certaines fonctions, définies à partir des accroissements de la fonction étudiée et appelées "spectres 2-microlocaux temporels", sont définies. La transformée de Legendre de chacun

de ces spectres 2-microlocaux temporels coïncide avec un tronçon de la frontière 2-microlocale, l'ensemble permettant de reconstruire toute cette frontière. Le formalisme 2-microlocal en temps est intéressant à cause du fait qu'il facilite le calcul littéral ou numérique de la frontière 2-microlocale. Nous donnons quelques exemples de tels calculs de frontières 2-microlocales par ce moyen.

Dans la troisième partie, nous explicitons le parallèle existant entre le spectre 2-microlocal et le spectre multifractal. Nous mettons en lumière des notions permettant de prouver dans un même cadre général le formalisme 2-microlocal en ondelettes (continues ou discrètes) et le formalisme multifractal faible. De plus, nous présentons, dans ce cadre commun, des résultats nouveaux concernant la prescription du spectre multifractal et du spectre 2-microlocal en un point.

Dans une quatrième partie, nous appliquons l'analyse 2-microlocale au débruitage de signaux. En particulier, nous nous intéressons au seuillage dur. Il est bien connu que ce type de seuillage appliqué à des signaux texturés conduit à un surlissage du signal, lorsque trop de coefficients sont annulés et/ou à la présence d'oscillations s'apparentant à du "ringing", lorsque seuls quelques coefficients isolés ne sont pas seuillés dans les petites échelles. Dans tous les cas, la texture initiale est impossible à retrouver. Nous cherchons une méthode de débruitage qui permette de retrouver la régularité du signal initial, d'abord en termes d'exposant de Hölder global sur un intervalle, puis en termes de frontière 2-microlocale en un point. Il est d'abord nécessaire de montrer que le seuillage dur ne permet effectivement pas de retrouver la régularité Hölderienne ou 2-microlocale du signal initial. Le problème posé par l'étude du seuillage en termes d'analyse 2-microlocale est qu'il s'applique à des signaux discrets et que, pour une amplitude de bruit constante, la valeur du seuil dépend du nombre de points du signal discret. Il est donc nécessaire de caractériser en termes d'exposant de Hölder global puis en termes d'analyse 2-microlocale la régularité de la *suite* de fonctions obtenues par un échantillonnage à  $n$  points de la fonction bruitée, suivi d'un débruitage, quand  $n$  tend vers l'infini.

L'exposant de Hölder global  $\alpha_g(f)$  (en supposant  $f$  à support borné) peut s'exprimer sous la forme suivante :  $\alpha_g(f) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \alpha_g(j, f)$ , où  $\alpha_g(j, f) = \min_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\log |\langle f, \psi_{jk} \rangle|}{-j} - 1/2$ . Nous définissons l'exposant global "entre deux échelles" par :  $\alpha_g(n_1, n_2, f) = \min_{j \in n_1 \dots n_2} \alpha_g(j, f)$ . Etant donnée une fonction  $f$ , on peut toujours trouver  $h$  qui tend assez lentement vers l'infini pour que  $\alpha_g(h(n), n, f)$

tende vers  $\alpha_g(f)$ . Nous nous intéressons ensuite aux suites  $\alpha_g(h(n), n, f_n)$ , où  $f_n$  est la fonction  $f$  échantillonnée sur  $2^n$  points, éventuellement bruitée et/ou débruitée. Le choix de  $h(n)$  correspond aux échelles considérées comme représentatives de la texture de la fonction  $f_n$ . Nous montrons qu'un seuillage dur peut, pour certains choix de  $h(n)$ , faire tendre  $\alpha_g(h(n), n, f_n)$  vers l'infini et proposons une méthode de débruitage permettant (à condition de faire certaines hypothèses sur la fonction étudiée), de retrouver l'exposant de Hölder global initial pour tout choix de  $h(n)$ .

Nous appliquons ensuite la même démarche à l'analyse 2-microlocale. Nous approximations la valeur  $\chi(\rho)$  du spectre 2-microlocal en un point par une grandeur  $\chi^r(\rho)$ , cette grandeur ayant l'avantage de pouvoir s'écrire comme la  $\liminf$  d'une suite calculée à partir des coefficients d'ondelettes à l'échelle  $j$ . Nous définissons ensuite, de manière analogue à  $\alpha_g(n_1, n_2, f)$ , les versions "entre deux échelles" des grandeurs  $\chi^r(\rho, n_1, n_2)$  et nous nous intéressons aux suites  $\chi^r(\rho, h(n), n)$ . La condition de l'existence d'une singularité oscillante se traduisant en termes de valeurs du spectre 2-microlocal, nous montrons alors qu'un seuillage dur peut, pour certains choix de  $h(n)$ , rendre oscillante la version débruitée d'une fonction  $f$  alors que  $f$  ne l'était pas au départ. Nous proposons finalement une méthode de débruitage en un point permettant (à condition de faire certaines hypothèses sur la fonction étudiée), de retrouver le spectre 2-microlocal initial pour tout choix de  $h(n)$ , et d'éviter ainsi les oscillations. Les méthodes de débruitages sont illustrées par des applications numériques sur des fonctions classiques.

Enfin, nous exposons dans la dernière partie un travail, de nature appliquée, effectué en collaboration avec l'ENILIA Surgères : il s'agit de l'application d'outils fractals caractérisant la régularité globale à la classification automatique d'images microscopiques de beurre.

# Chapitre 2

## Rappels sur les espaces 2-microlocaux

Dans ce chapitre, nous rappelons brièvement la définition classique des espaces 2-microlocaux telle qu'elle a été donnée par J.M. Bony [Bon86] pour étudier la propagation des irrégularités dans les solutions d'une équation aux dérivées partielles. La définition originale de [Bon86] fait intervenir une décomposition de Littlewood-Paley. Une caractérisation des espaces 2-microlocaux en termes d'ondelettes a été donnée dans [Jaf91]. Enfin, on introduit la frontière 2-microlocale définie à partir de ces espaces.

### 2.1 Décomposition de Littlewood-Paley

#### 2.1.1 Définition globale

Les espaces 2-microlocaux *globaux* tels qu'ils ont été introduits initialement sont définis au moyen d'une décomposition de Littlewood-Paley. On considère une fonction  $\phi$  dans l'espace de Schwarz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \forall (l, m) \in \mathbb{N}^2 : x \rightarrow x^l \partial^m u(x) \text{ est bornée}\}$  dont la transformée de Fourier  $\hat{\phi}$  vérifie :

$$\hat{\phi}(\xi) = 1 \text{ si } |\xi| \leq 1/2, \quad \hat{\phi}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq 1 \quad (2.1)$$

On note aussi pour  $j \in \mathbb{Z}$  :  $\phi_j(x) = 2^{nj} \phi(2^j x)$ ,  $S_j(f) = f * \phi_j$  et  $\Delta_j = S_{j+1} - S_j$ . On a alors, pour toute distribution tempérée  $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$  :

$$f = S_0 f + \sum_j \Delta_j f. \quad (2.2)$$

La définition globale des espaces 2-microlocaux est la suivante :

**Définition 2.1.** Soient  $s$  et  $s'$  deux réels,  $x_0$  un point de  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une distribution tempérée. Alors  $f$  appartient à l'espace 2-microlocal global  $C_{x_0, \text{global}}^{s, s'}$  si, et seule-

ment s'il existe une constante  $C$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $j \in \mathbb{N}$  les conditions suivantes sont satisfaites :

$$|S_0 f(x)| \leq C(1 + |x - x_0|)^{-s'} \quad (2.3)$$

$$|\Delta_j f(x)| \leq C 2^{-js} (1 + 2^j |x - x_0|)^{-s'} \quad (2.4)$$

En termes de traitement du signal, on peut interpréter la décomposition de Littlewood-Paley de la manière suivante : considérons les fonctions

$$\psi_j(x) = \phi_{j+1}(x) - \phi_j(x).$$

$\psi_j$  est un filtre passe-bande ne laissant passer que des fréquences comprises entre  $2^j$  et  $2^{j+1}$ .  $\Delta_j f = f * \psi_j$  est donc le résultat de l'application de ce filtre au signal  $f$ .

Il s'agit de comparer la suite de fonctions  $\Delta_j(f)$  à la suite de fonctions :

$$x \rightarrow 2^{-js} (1 + 2^j |x - x_0|)^{-s'}.$$

Si  $f$  contient peu de hautes fréquences, alors les  $\Delta_j(f)$  deviendront très vite petits quand  $j$  tend vers  $+\infty$ . La “vitesse de décroissance de  $\Delta_j f$ ” (ou de croissance si  $s < 0$ ) en fonction de  $j$  peut donc être interprétée comme reflétée par le paramètre  $s$ , puisque  $\Delta_j f(0)$  doit être plus petit que  $2^{-js}$ .

De plus, pour observer cette vitesse de décroissance, on compare  $\Delta_j f$  à une fonction proportionnelle à  $(1 + 2^j |x - x_0|)^{-s'}$ . Le paramètre  $s'$  peut donc refléter la localisation de  $\Delta_j f$  en temps autour du point  $x_0$ . L'appartenance à l'espace 2-microlocal  $C_{x_0}^{s,s'}$  caractérise finalement une localisation, à la fois en temps et en fréquence autour du point  $x_0$  et de la fréquence nulle (voir figure 2.1).

La décomposition de Littlewood-Paley 2.2 associée au théorème suivant, dont la démonstration se trouve dans [Mey98], montre que l'appartenance à l'espace 2-microlocal  $C_{x_0, global}^{s,s'}$  ne dépend pas de la fonction  $\phi$  choisie :

**Théorème 2.1.** *Soit  $b > a > 0$ . Pour toute suite  $U_j$ ,  $j \in \mathbb{N}$  de fonctions satisfaisant*

$$U_j(x) \leq C(1 + |x|)^{-s'} \quad (2.5)$$

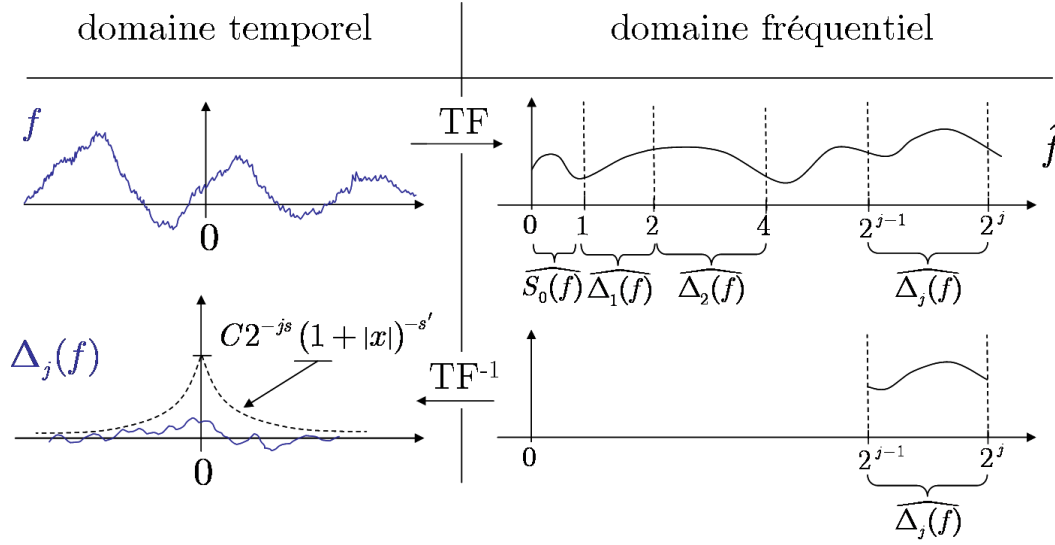


FIG. 2.1 – Appartenance à  $C_{x_0}^{s,s'}$ , en supposant pour simplifier  $\widehat{\phi}(\xi) = 1_{|\xi| \leq 1}$

et :

la transformée de Fourier de  $U_j$  est nulle en dehors de l'anneau  $\{\xi : a \leq |\xi| \leq b\}$

(2.6)

Alors la série  $f(x) = \sum_0^\infty 2^{-js} U_j(2^j(x - x_0))$  appartient à  $C_{x_0}^{s,s'}$

Détaillons la démonstration de l'indépendance des espaces 2-microlocaux par rapport au choix de  $\phi$  (en admettant le théorème 2.1).

Notons de manière temporaire  $S_j(f, \phi) = f * \phi_j$ ,  $\Delta_j(f, \phi) = S_{j+1}(f, \phi) - S_j(f, \phi)$  et  $C_{x_0, global}^{s,s'}(\phi)$  les espaces 2-microlocaux définis pour une fonction  $\phi$  donnée. Considérons deux fonctions  $\phi^1$  et  $\phi^2$  de  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  vérifiant l'équation 2.1 ainsi qu'une fonction  $f \in C_{x_0, global}^{s,s'}(\phi^1)$

Remarquons d'abord que  $S_0(f, \phi^1) \in C_{x_0, global}^{s,s'}(\phi^2)$ . En effet, sa transformée de Fourier s'annule en dehors de  $[-1, 1]$ , donc  $\Delta_j(S_0(f, \phi^1), \phi^2)$  est nulle pour tout  $j \geq 1$ . Comme  $S_0(S_0(f, \phi^1), \phi^2)$  et  $\Delta_0(S_0(f, \phi^1), \phi^2)$  sont toutes les deux bornées, on a bien ce résultat.

Maintenant, on peut écrire  $f$  sous la forme 2.2 :  $f = S_0(f, \phi^1) + \sum_{j=0}^\infty \Delta_j(f, \phi^1)$ . On a vu que  $S_0(f, \phi^1) \in C_{x_0, global}^{s,s'}(\phi^2)$ . En définissant  $U_j$  par :

$$\Delta_j(f, \phi^1) = 2^{-js} U_j(2^j(x - x_0))$$

et en remarquant que la transformée de Fourier de  $U_j$  s'annule en dehors de  $\{\xi : 1/2 \leq |\xi| \leq 2\}$ , il est possible d'appliquer le théorème 2.1 :  $f \in C_{x_0, global}^{s, s'}(\phi^2)$ .

On en déduit  $C_{x_0, global}^{s, s'}(\phi^1) \subset C_{x_0, global}^{s, s'}(\phi^2)$  puis, par symétrie,  $C_{x_0, global}^{s, s'}(\phi^1) = C_{x_0, global}^{s, s'}(\phi^2)$ .

### 2.1.2 Définition locale des espaces 2-microlocaux

La définition 2.1 impose des contraintes sur le comportement de  $f$  en  $\pm\infty$ . On peut s'en convaincre en remarquant qu'une fonction dans  $C_{x_0, global}^{0, \epsilon}$  pour  $\epsilon > 0$  est bornée sur  $\mathbb{R}$  (en effet,  $f = S_0 + \sum \Delta_j$ , avec  $|\Delta_j f(x)| < C2^{-j\epsilon}$  et  $|S_0 f(x)| < C$ ). Encore plus simplement,  $f$  doit par définition être une distribution tempérée pour pouvoir appartenir aux espaces 2-microlocaux globaux. Ainsi, la fonction  $t \rightarrow \exp(t^2)$  n'est pas une distribution tempérée (en effet,  $\int_{\mathbb{R}} \exp(t^2) \cdot \exp(-t^2) dt$  n'est pas définie alors que  $t \rightarrow \exp(-t^2) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ). Elle n'est donc dans aucun des espaces 2-microlocaux globaux, alors qu'elle est  $C^\infty$  en tout point.

Si l'on s'intéresse seulement, ce qui est notre cas, au comportement d'une fonction  $f$  au voisinage du point  $x_0$ , il est utile d'introduire, comme il est fait dans [Mey98], une version *locale* des espaces 2-microlocaux.

Une distribution  $f$  sera dans la version locale de l'espace global  $C_{x_0, global}^{s, s'}$  si elle coïncide avec une distribution  $g \in C_{x_0, global}^{s, s'}$  sur un voisinage de  $x_0$ . Pour que les produits scalaires  $\langle g, \psi \rangle$  soient définis, on doit avoir  $g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . En revanche,  $f$  peut être une distribution quelconque. On note  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  l'ensemble des distributions et  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions  $C^\infty$  à support borné.

La définition locale des espaces 2-microlocaux est la suivante :

**Définition 2.2.** Soit  $V_0$  un voisinage ouvert de  $x_0$  et  $S$  une distribution dans  $\mathcal{D}'(V_0)$ . On écrira " $S$  appartient à l'espace 2-microlocal  $C_{x_0}^{s, s'}$ " s'il existe un voisinage de  $x_0$   $V_1 \subset V_0$  et une distribution  $f$  appartenant à l'espace global  $C_{x_0, global}^{s, s'}$  telle que :

$$f = S \text{ sur } V_1$$

Les espaces 2-microlocaux locaux peuvent être caractérisés de la manière suivante [Mey98] :

**Théorème 2.2.** Si  $f$  est une distribution définie sur un voisinage  $V_0$  de  $x_0$ , les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- $f \in C_{x_0}^{s,s'}$
- Il existe un voisinage  $V_1$  de  $x_0$ ,  $V_1 \subset V_0$  et une fonction  $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $g = 1$  sur  $V_1$ ,  $\text{support } g \subset V_0$  et  $|\Delta_j(gf)(x)| \leq C2^{-js}(1+2^j|x-x_0|)^{-s'}$  pour  $j \geq 0$  et  $x \in V_1$

### Comportement sous l'effet d'une intégration ou d'une dérivation

Les espaces 2-microlocaux se comportent de manière stable sous l'effet d'une dérivation. On peut trouver dans [Mey98] la démonstration des théorèmes 2.3, 2.4 et 2.5.

**Théorème 2.3.** *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s' \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}$  :*

$$f \in C_{x_0, \text{global}}^{s,s'}$$

$$S_0(f) = O(|x|^{-s'}) \text{ quand } |x| \rightarrow \infty \text{ et } f^{(m)} \in C_{x_0}^{s-m,s'}$$

Ce théorème s'adapte facilement pour la version locale des espaces 2-microlocaux :

**Théorème 2.4.** *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour  $s \in \mathbb{R}$ ,  $s' \in \mathbb{R}$  et  $m \in \mathbb{N}$  :*

$$f \in C_{x_0}^{s,s'}$$

$$f^{(m)} \in C_{x_0}^{s-m,s'}$$

De plus, les espaces 2-microlocaux  $C_{x_0}^{s,s'}$  sont stables sous l'effet d'une multiplication par  $(x - x_0)$  :

**Théorème 2.5.** *Soit  $f$  une distribution sur  $\mathbb{R}$  définie sur un voisinage de 0. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

$$f \in C_0^{s,s'}$$

$$\text{Il existe un réel } t \text{ tel que } f \in C_0^{s,t} \text{ et } xf' \in C_0^{s,s'-1}$$

## 2.2 La frontière 2-microlocale

La frontière 2-microlocale [GL98, Mey98] est définie grâce aux espaces 2-microlocaux. Il s'agit d'une fonction qui caractérise de façon très complète la



régularité d'une distribution en un point. On peut lire différents exposants de régularité sur son graphe, comme les exposants de Hölder ponctuel et local, ou bien l'exposant de chirp (voir ci-dessous pour les définitions), intéressants en traitement du signal car ils permettent de caractériser l'aspect oscillant ou rugueux d'une courbe, par exemple.

### 2.2.1 Le domaine 2-microlocal

Soit  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Pour donner une représentation graphique du comportement de  $f$  au voisinage de  $x_0$ , on considère le sous-ensemble du plan :

$$E(f, x_0) = \{(s, s') : f \in C_{x_0}^{s, s'}\}.$$

On va voir que la frontière de cet ensemble peut être décrite au moyen d'une fonction, appelée *frontière 2-microlocale de  $f$  en  $x_0$* .

Les propositions 2.1 et 2.2 sont classiques.

**Proposition 2.1.** *Si  $(s, s') \in E(f, x_0)$ , si*

$$t \leq s \quad \text{et} \quad t + t' \leq s + s'$$

*alors  $(t, t') \in E(f, x_0)$*

*Preuve.* On utilise le théorème 2.2 : pour  $j \geq 0$  et  $x \in V_1 \cap (x_0 - 1, x_0 + 1)$ ,  $|\Delta_j(gf)(x)| \leq C2^{-js}(1 + 2^j|x - x_0|)^{-s'}$ , donc :

$$|\Delta_j(gf)(x)| \leq C(1 + 2^j|x - x_0|)^{-(s+s')}(2^{-j} + |x - x_0|)^s.$$

Or,  $1 + 2^j|x - x_0| \geq 1$  et  $\frac{1}{2}(2^{-j} + |x - x_0|) \leq 1$ , donc

$$|\Delta_j(gf)(x)| \leq C2^{s-t}(1 + 2^j|x - x_0|)^{-(t+t')}(2^{-j} + |x - x_0|)^t$$

d'où le résultat. □

**Proposition 2.2.** *L'ensemble  $E(f, x_0)$  est convexe*

*Preuve.* On utilise encore le théorème 2.2. Si  $(s, s') \in E(f, x_0)$  et  $(t, t') \in E(f, x_0)$ ,

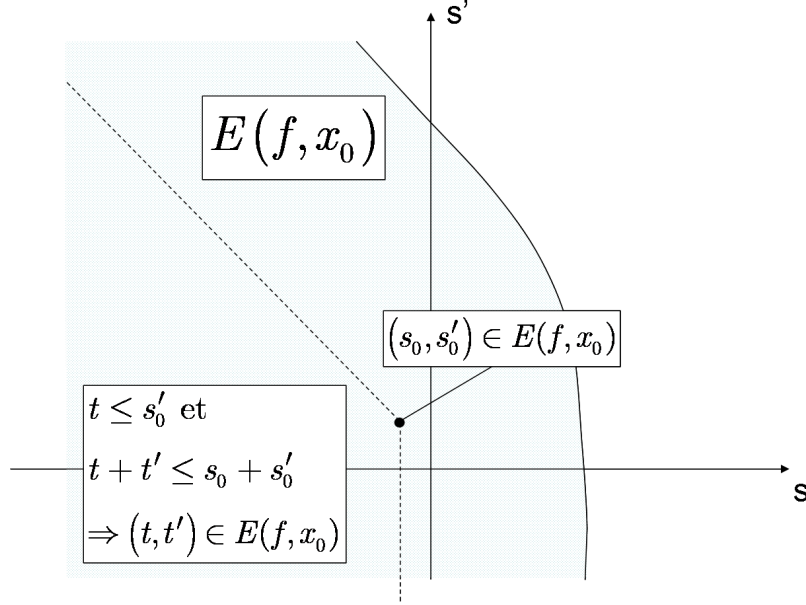


FIG. 2.2 – Allure du domaine 2-microlocal  $E(f, x_0)$ .

alors pour tout  $\lambda \in [0, 1]$ ,

$$|\Delta_j(gf)(x)|^\lambda \leq C 2^{-j\lambda s} (1 + 2^j |x - x_0|)^{-\lambda s'}$$

et

$$|\Delta_j(gf)(x)|^{1-\lambda} \leq C 2^{-j(1-\lambda)t} (1 + 2^j |x - x_0|)^{-(1-\lambda)t'}.$$

On obtient le résultat en multipliant terme à terme ces deux inégalités.  $\square$

On peut donc tracer l'allure de l'ensemble des  $(s, s')$  tels que  $f \in C_{x_0}^{s, s'}$  (figure 2.2).

### 2.2.2 Définition de la frontière 2-microlocale

D'après la proposition 2.2,  $E(f, x_0)$  est convexe. Cet ensemble peut donc être décrit assez précisément et simplement par sa frontière. La proposition 2.1 nous montre de plus que cette frontière est une borne supérieure, puisque les espaces 2-microlocaux sont “emboîtés”.

Il serait donc tentant de décrire l'ensemble des  $(s, s')$  tels que  $f \in C_{x_0}^{s, s'}$  à l'aide d'une fonction  $h(s) = \sup\{s' : f \in C_{x_0}^{s, s'}\}$ . L'inconvénient d'une telle paramétri-

sation est qu'elle ne permet pas de décrire les cas où la frontière de  $E(f, x_0)$  est verticale.

On préfère donc généralement effectuer un changement de variable et se placer dans le plan  $(s', \sigma)$  où  $\sigma = s + s'$  pour définir la frontière 2-microlocale.

**Définition 2.3.** Soit  $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

La frontière 2-microlocale de  $f$  en  $x_0$  est la fonction définie par :

$$\sigma(s') = \sup\{\sigma : f \in C_{x_0}^{\sigma-s', s'}\}$$

### 2.2.3 Propriétés de la frontière 2-microlocale

La frontière 2-microlocale permet de décrire de manière précise l'appartenance aux espaces 2-microlocaux.

**Proposition 2.3.** Pour tout couple  $(s, s')$

- $s + s' < \sigma(s') \Rightarrow f \in C_{x_0}^{s, s'}$
- $s + s' > \sigma(s') \Rightarrow f \notin C_{x_0}^{s, s'}$

Le premier point de la proposition 2.3 est une conséquence directe de la proposition 2.1, tandis que le second vient immédiatement de la définition de la frontière 2-microlocale. La proposition 2.4 vient des propositions 2.1 et 2.2 : la frontière 2-microlocale vérifie certaines propriétés de croissance et de régularité.

**Proposition 2.4.**  $\sigma$  est une fonction convexe, de pente comprise entre 0 et 1.

L'allure de la frontière 2-microlocale est présentée figure 2.3.

### 2.2.4 Frontière 2-microlocale et exposants de régularité

La frontière 2-microlocale peut être reliée à différents exposants de régularité (voir figure 2.3). Nous rappelons d'abord très brièvement les définitions de ces exposants, puis nous explicitons le lien entre ceux-ci et la frontière 2-microlocale. Voir [LS04] pour plus de détails.

#### Exposants classiques de régularité

L'exposant de régularité le plus classique est l'exposant de Hölder ponctuel  $\alpha_p$ . Il peut être complété par l'exposant de Hölder local  $\alpha_l$ . Ces deux exposants possèdent de nombreuses applications en traitement du signal [GL98, LL03,

MSK03, PPL02, Lév97] et sont décrits en détail dans la partie 3.1 : voir les définitions 3.1, 3.2, 3.3 pour l'exposant de Hölder ponctuel et les définitions 3.4, 3.5 et 3.6 pour l'exposant de Hölder local.

D'autres exposants ont été proposés, comme l'exposant de chirp [Mey98], l'exposant d'oscillations [AAM98] ou l'exposant de “weak scaling” [Mey98] :

**Définition 2.4.** Soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  et  $f^{(-n)}$  une primitive de  $f$  d'ordre  $n$ .  $f$  est une chirp de type  $(h, \beta)$  au point  $x_0$  si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f^{(-n)} \in C^{h+n(1+\beta)}(x_0).$$

L'exposant de chirp  $\beta_c(f, x_0)$  est alors la borne supérieure des valeurs de  $\beta$  pour lesquelles  $f$  est un chirp de type  $(h, \beta)$ .

L'exposant de chirp repose sur l'idée qu'une fonction qui oscille rapidement autour du point  $x_0$  va devenir “plus rapidement” régulière après un grand nombre d'oscillations qu'une fonction ne présentant pas ces oscillations. Il est donc lié au comportement de la fonction après un grand nombre d'intégrations.

Une autre approche est de chercher à caractériser le comportement de la fonction après une intégration infinitésimale.

**Définition 2.5.** soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  et  $\alpha_p(f_t, x_0)$  l'exposant de Hölder ponctuel de la primitive fractionnaire de  $f$  d'ordre  $t > 0$  au point  $x_0$ . L'exposant d'oscillation de  $f$  en  $x_0$  est :

$$\beta_o(f, x_0) = \left( \frac{\partial}{\partial t} \alpha_p(f_t, x_0) \right)_{t=0+} - 1$$

Enfin, l'exposant “weak scaling” a été introduit dans [Mey98].

**Définition 2.6.** Soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  et  $f^{(-n)}$  une primitive de  $f$  d'ordre  $n$ . L'exposant “weak scaling” de  $f$  en  $x_0$  est :

$$\beta_w(f, x_0) = \sup\{s : \exists n \in \mathbb{N} : f^{(-n)} \in C^{s+n}(x_0)\}$$

## Lecture des exposants de régularité sur la frontière 2-microlocale

Tous les exposants de la partie 2.2.4 peuvent être lus sur la frontière 2-microlocale. La proposition suivante ((énoncée dans [LS04]) récapitule les relations entre  $\sigma$  et ces exposants :

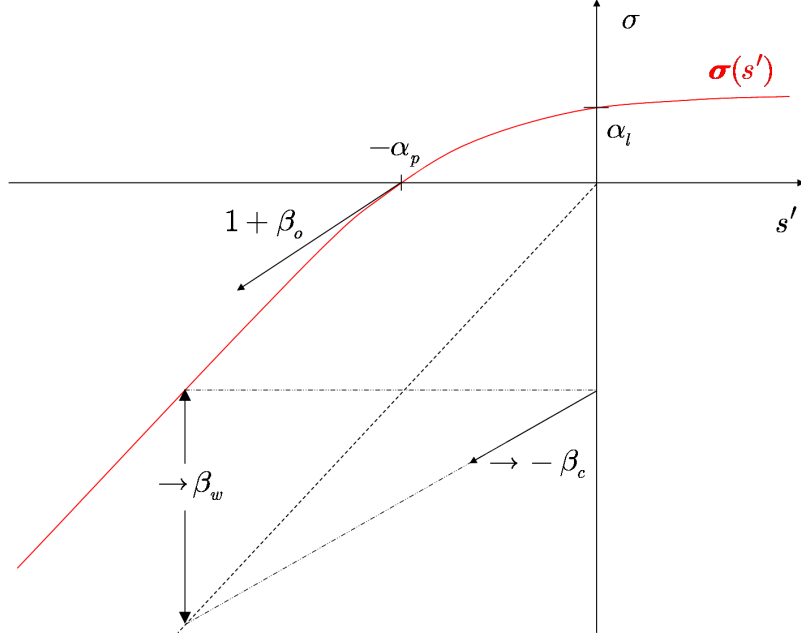


FIG. 2.3 – Exposants de régularité et frontière 2-microlocale

**Proposition 2.5.** Soit  $f \in D^\epsilon(x_0)$  pour  $\epsilon > 0$ . Soit  $\sigma$  la frontière 2-microlocale de  $f$  au point  $x_0$ . Alors :

- $\alpha_p(f, x_0) = -\inf\{s' : \sigma(s') \geq 0\}$  , avec la convention  $\inf \mathbb{R} = -\infty$
- $\alpha_l(f, x_0) = \sigma(0)$
- $\beta_c(f, x_0) = \lim_{s' \rightarrow -\infty} \frac{s' - \sigma(s')}{s'}$
- $\beta_w(f, x_0) = \lim_{s' \rightarrow -\infty} \sigma(s') - s'$
- $\beta_o(f, x_0) = \lim_{s' \rightarrow -\alpha_p(f, x_0)^-} \frac{\sigma(s')}{s' + \alpha_p(f, x_0)} - 1 = \left( \frac{\partial \sigma}{\partial s'} \right) (-\alpha_l(f, x_0)) - 1$

Voir figure 2.3 pour une représentation graphique de la proposition 2.5.

## 2.3 Caractérisations en ondelettes des espaces 2-microlocaux

L'appartenance aux espaces 2-microlocaux révélant à la fois une localisation en temps et en fréquence, il semble naturel de chercher à caractériser ces espaces en termes de coefficients d'ondelettes.

On utilise les notations usuelles : étant donné une fonction  $\psi$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,

on notera :

$$\psi_{(a,b)}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \quad (2.7)$$

les versions translatées et dilatées de  $\psi$ . On notera également :

$$\psi_{j,k}(x) = \psi_{(2^{-j}, k2^{-j})}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k). \quad (2.8)$$

Une caractérisation par la transformée en ondelettes continues et par transformée en ondelettes discrètes des espaces 2-microlocaux a été donnée dans [Jaf91]. On peut trouver une fonction  $\psi$  vérifiant les hypothèses nécessaires à l'application des théorèmes 2.6 et 2.7. Voir par exemple [Mey90a].

### 2.3.1 Caractérisation en ondelettes continues

**Théorème 2.6.** [Jaf91] Soient  $(r, N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ . Soit  $\psi$  une fonction vérifiant les conditions suivantes :

$$\psi \text{ est une ondelette admissible.} \quad (2.9)$$

$$\psi \text{ a } N \text{ moments nuls et ses } r \text{ premières dérivées sont à décroissance rapide.} \quad (2.10)$$

Soient  $(s, s')$  deux réels tels que  $r + s + \inf(s', 1) > 0$  et  $N > \max(s, s + s')$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

$$f \in C_{x_0}^{s,s'} \quad (2.11)$$

$$\forall a > 0, |b - x_0| < 1 : \left| \langle f, \psi_{(a,b)} \rangle \right| \leq C a^{s+1/2} \left( 1 + \frac{|b - x_0|}{a} \right)^{-s'} \quad (2.12)$$

### 2.3.2 Caractérisation en ondelettes discrètes

**Théorème 2.7.** [Jaf91] Soient  $(r, N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ . Soit  $\psi$  une fonction vérifiant les conditions suivantes :

$$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}). \quad (2.13)$$

$$\text{Les } (\psi_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}^2} \text{ forment une base orthonormale de } L^2(\mathbb{R}). \quad (2.14)$$

$$\psi \text{ a } N \text{ moments nuls et } r \text{ premières dérivées à décroissance rapide.} \quad (2.15)$$

Soient  $(s, s')$  deux réels tels que  $r + s + \inf(s', 1) > 0$  et  $N > \max(s, s + s')$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

$$f \in C_{x_0}^{s, s'} \quad (2.16)$$

$$\forall (j, k) \text{ tels que } |x_0 - k2^{-j}| \leq 1 : |\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \leq C2^{-j(s+1/2)}(1 + |k - 2^j x_0|)^{-s'} \quad (2.17)$$

## 2.4 Conclusion

On a vu que les espaces 2-microlocaux permettent de décrire précisément le comportement d'une fonction au voisinage d'un point au moyen de la frontière 2-microlocale. Ils peuvent être interprétés grâce à une condition en temps sur sa décomposition fréquentielle, grâce à leur définition par une décomposition de Littlewood-Paley, ou bien en temps-échelle, grâce à leur caractérisation en termes d'ondelettes. Néanmoins, ces deux interprétations nécessitent de considérer des transformations de la fonction considérée. On va voir dans la prochaine partie que les espaces 2-microlocaux peuvent être en fait caractérisés au moyen des accroissements de la fonction, ce qui fournira une interprétation plus aisée à l'analyse 2-microlocale et ses applications.

# Chapitre 3

## Une approche temporelle de l'analyse 2-microlocale

On s'intéresse dans ce chapitre à la possibilité de caractériser les espaces 2-microlocaux en temps, à l'aide des accroissements de la fonction.

Afin d'introduire cette caractérisation en temps, on commence par rappeler les définitions et propriétés des espaces de Hölder ponctuel et local. Ces espaces ont fait leur preuves dans de nombreuses applications. Les exposants correspondants, l'exposant de Hölder ponctuel et l'exposant de Hölder local, donnent une information importante sur la régularité de la courbe. Nous verrons néanmoins que cette information est incomplète.

On présente ensuite une caractérisation des espaces 2-microlocaux proche de celle donnée dans [KL02, SL03] (voir aussi [Mey98]). Sous cette forme, les espaces 2-microlocaux apparaissent comme une généralisation des espaces de Hölder ponctuel ou local <sup>1</sup>. Ainsi, l'analyse 2-microlocale complète l'information donnée par l'analyse Hölderienne.

Enfin, nous montrons le formalisme 2-microlocal en temps, qui est un moyen d'obtenir la frontière 2-microlocale par le calcul littéral ou numérique. Il s'agit d'une démarche analogue à celle utilisée dans [GL98, LS04] avec les coefficients d'ondelettes : une fonction  $\chi$ , appelée *spectre 2-microlocal*, est définie en chaque point du signal. Le spectre 2-microlocal en ondelettes mesure l'évolution des coefficients d'ondelettes suivant certaines courbes du plan temps-échelle. Cette fonction vérifie la propriété suivante : la frontière 2-microlocale est la transformée de Legendre du spectre 2-microlocal. Un moyen de calculer la frontière 2-microlocale est donc de calculer son spectre 2-microlocal, puis de retrouver la frontière par transformée de Legendre.

Une démarche semblable peut être suivie avec la caractérisation temporelle des espaces 2-microlocaux, les accroissements jouant le rôle des coefficients d'on-

---

<sup>1</sup>Cette caractérisation faisant intervenir des valeurs ponctuelles, l'analyse 2-microlocale est ici restreinte aux fonctions.



delettes. Il est néanmoins nécessaire de découper la frontière en plusieurs tronçons, chaque tronçon pouvant être calculé par cette méthode. Il est ainsi possible, comme ceci était conjecturé dans [LS04], d’obtenir un formalisme 2-microlocal en temps.

On rappelle dans une première partie les propriétés des exposants de Hölder ponctuel et local. La deuxième partie traite de la caractérisation en temps des espaces 2-microlocaux. Enfin, on présente dans une dernière partie le spectre 2-microlocal temporel et quelques applications numériques.

## 3.1 Rappels sur les exposants de régularité Hölderienne

Nous donnons dans cette section plusieurs caractérisations, dont certaines sont nouvelles, des exposants de Hölder ponctuel et locaux.

### 3.1.1 Exposant de Hölder ponctuel

#### Définition et propriétés

Pour définir l’exposant de Hölder ponctuel, il est commode d’introduire les espaces de Hölder ponctuels.

**Définition 3.1.** *Soit  $\alpha \in (0, 1)$ .*

*Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ .*

*$f$  appartient à l’espace de Hölder ponctuel  $C^\alpha(x_0)$  s’il existe  $\epsilon > 0$  et  $C \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $t$ ,  $|t| < \epsilon$  :*

$$|f(x_0 + t) - f(x_0)| \leq C |t|^\alpha$$

On peut interpréter graphiquement la définition 3.1 : le graphe de  $f$  doit se trouver à l’intérieur de la “capsule” d’équation  $f(x_0) \pm C \cdot |x - x_0|^\alpha$  lorsque  $|x - x_0|$  est assez petit (fig. 3.1).

La remarque 3.1, obtenue par inégalité triangulaire, sera utile pour faire le lien entre les espaces 2-microlocaux et les espaces de Hölder ponctuels.

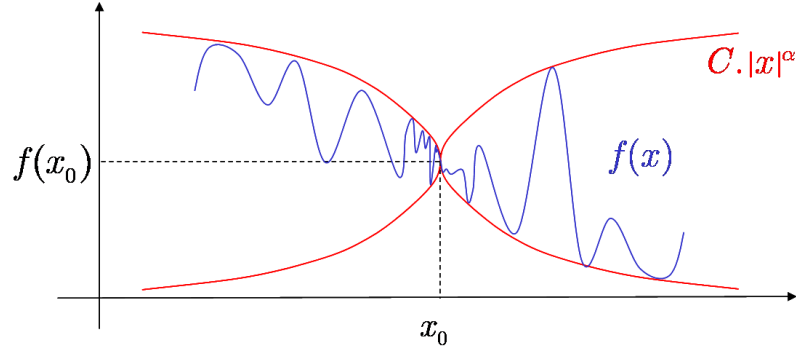


FIG. 3.1 –  $f$  appartient à l'espace de Hölder ponctuel  $C^\alpha(x_0)$  si son graphe est contenu dans l'enveloppe d'équation  $f(x_0) \pm C|x - x_0|^\alpha$

**Remarque 3.1.** Soit  $\alpha \in (0, 1)$ .

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

$f$  appartient à l'espace de Hölder ponctuel  $C^\alpha(x_0)$  si, et seulement s'il existe  $\epsilon > 0$  et  $C \in \mathbb{R}$  tels que pour tous  $(t, h)$ , de même signe,  $0 < |h| \leq |t| < \epsilon$  :

$$|f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)| \leq C |t|^\alpha$$

La définition 3.1 n'est valable que si  $\alpha$  est strictement inférieur à 1. En effet, si on l'appliquait telle quelle pour  $\alpha > 1$ , toutes les fonctions de dérivée non nulle en  $x_0$  seraient "exclues" des espaces  $C^\alpha(x_0)$ . Il faut soustraire sa partie polynômiale à la fonction considérée pour atteindre les exposants plus grands que 1.

**Définition 3.2.** Soit  $\alpha \in (0, 1)$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

$f \in C^{\alpha+m}(x_0)$  s'il existe un polynôme  $P$  tel que :

$$f(x_0 + t) = P(t) + t^m \mathcal{R}(t)$$

où  $\mathcal{R} \in C^\alpha(0)$ .

**Remarque 3.2.** Si un tel polynôme existe, on peut choisir  $\deg P \leq m$  et  $\mathcal{R}(0) = 0$ .  $P$  est alors le développement limité d'ordre  $m$  de  $f$  en 0.

La propriété suivante est évidente :

**Proposition 3.1.** *Pour tous  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$  :*

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow C^{\alpha_2}(x_0) \subset C^{\alpha_1}(x_0)$$

Ainsi, les espaces de Hölder ponctuels en un point donné sont “emboîtés” les uns dans les autres et l’ensemble des  $\alpha$  tels que  $f \in C^\alpha(x_0)$  peut être décrit par sa borne supérieure, l’exposant de Hölder ponctuel.

**Définition 3.3.** *Soit  $f$  une fonction et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . L’exposant de Hölder ponctuel de  $f$  en  $x_0$  est :*

$$\alpha_p(f, x_0) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{N} : f \in C^\alpha(x_0)\}$$

avec la convention :  $\sup(\emptyset) = 0$ .

L’exposant de Hölder ponctuel peut être interprété de la manière suivante : la différence entre  $f$  et son approximation polynômiale en  $x_0$  est au plus de l’ordre de  $|x - x_0|^{\alpha_p(f, x_0)}$ .

L’exposant de Hölder ponctuel est donc lié à la possibilité d’approximer la fonction par un polynôme au point considéré :

**Proposition 3.2.** *Si  $f$  admet un développement limité d’ordre  $n$  en  $x_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $\alpha_p(f, x_0) = +\infty$ .*

*Sinon,  $\alpha_p(f, x_0) \in [m, m + 1]$ , où  $m$  est le plus grand entier tel que  $f$  admet un développement limité d’ordre  $m$  en  $x_0$ .*

Enfin, on peut exprimer  $\alpha_p$  à l’aide d’une  $\liminf$  :

**Proposition 3.3.** *Soit  $f$  une fonction et  $x_0 \in \mathbb{R}$ .*

*Si  $f$  admet un développement limité d’ordre  $n$  en  $x_0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $\alpha_p(f, x_0) = +\infty$ .*

*Sinon, soit  $m$  le plus grand entier tel que  $f$  admet un développement limité d’ordre  $m$  en  $x_0$ ,  $P$  ce développement limité et  $\mathcal{R}$  la fonction définie par :*

$$f(x_0 + t) = P(t) + t^m \mathcal{R}(t)$$

*Alors, en notant  $v(x) = \min(\max(0, x), 1)$  :*

$$\alpha_p(f, x_0) = m + v \left( \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{\log |\mathcal{R}(t)|}{\log |t|} \right)$$

En particulier, si  $\alpha_p(f, x_0) \in (0, 1)$  alors :

$$\alpha_p(f, x_0) = \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{\log |f(t + x_0) - f(x_0)|}{\log |t|}$$

*Preuve.* On sait que  $\alpha_p \in [m, m + 1]$ .

Pour tout réel  $\alpha \in (0, 1)$ , si  $m + \alpha < \alpha_p(f, x_0)$  alors  $g \in C^\alpha(0)$ , donc  $|\mathcal{R}(t) - \mathcal{R}(0)| \leq C \cdot |t|^\alpha$  pour  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . En passant au logarithme et en remarquant que  $\mathcal{R}(0) = 0$  :  $\frac{C}{\log |t|} + \alpha \leq \frac{\log |\mathcal{R}(t)|}{\log |t|}$ . On en déduit en prenant la  $\liminf$  quand  $t$  tend vers 0 :  $\alpha \leq \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{\log |\mathcal{R}(t)|}{\log |t|}$ .

Inversement, si  $m + \alpha > \alpha_p(f, x_0)$ , alors  $\mathcal{R} \notin C^\alpha(x_0)$ , donc il existe une suite  $(t_n)_n$  qui tend vers 0 telle que  $|\mathcal{R}(t_n)| \geq C \cdot |t_n|^\alpha$ . En passant au logarithme et en prenant la  $\liminf$  quand  $t$  tend vers 0, on en déduit :  $\alpha \geq \liminf_{t \rightarrow 0} \frac{\log |\mathcal{R}(t)|}{\log |t|}$ .  $\square$

### Exemples et interprétation.

Quelques fonctions très simples peuvent servir d'exemple pour illustrer le comportement de l'exposant de Hölder ponctuel. Considérons :

$$\begin{aligned} f_1^\beta(x) &= |x|^\beta \\ f_2^{\beta, \gamma}(x) &= |x|^\beta \cdot \sin |x|^{-\gamma} \\ f_3^\beta(x) &= |x|^\beta \cdot 1_{\mathbb{Q}}(x) \end{aligned}$$

où on suppose  $\beta > 0$  et  $\gamma > 0$  et où  $1_{\mathbb{Q}}$  est la fonction indicatrice de  $\mathbb{Q}$ . De manière évidente :

$$\begin{aligned} \alpha_p(f_1^\beta, x) = \alpha_p(f_2^{\beta, \gamma}, x) &= \begin{cases} \beta & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \alpha_p(f_3^\beta, x) &= \begin{cases} \beta & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Une première remarque est que  $\alpha_p(f_1^\beta, 0) = \alpha_p(f_2^{\beta, \gamma}, 0) = \alpha_p(f_3^\beta, 0)$ . L'exposant de Hölder ponctuel est sensible uniquement à l'enveloppe de la fonction, et non au comportement de la fonction à l'intérieur de cette enveloppe. Un avantage de la "myopie" de cet exposant est la volatilité qu'elle implique : ainsi, il permet de distinguer des points réguliers dans un environnement irrégulier, comme dans le cas de  $f_3^\beta$ , où le seul point continu a bien un exposant supérieur à celui de

tous ses voisins. Néanmoins, ceci est aussi un inconvénient : malgré leur aspect visuel très différent, les fonctions  $f_1^\beta$  et  $f_2^{\beta,\gamma}$  ont le même exposant en tout point. L'exposant de Hölder ponctuel ne permet donc pas de les distinguer et est insensible aux oscillations de  $f_2^{\beta,\gamma}$ . Enfin, cette volatilité rend le calcul de l'exposant ponctuel difficile d'un point de vue numérique.

### Comportement de l'exposant de Hölder ponctuel sous l'effet d'une transformation de la fonction

L'exposant de Hölder ponctuel se comporte de manière stable sous l'effet d'une multiplication par une puissance de  $x$  : connaissant l'exposant de  $f$ , on connaît l'exposant de  $|x - x_0|^n \cdot f(x)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En effet, si  $g(x) = (x - x_0)^n \cdot f(x)$ , alors  $\alpha_p(g, x_0) = \alpha_p(f, x_0) + n$ .

Inversement, si  $f$  est une fonction dérivable au point  $x_0$ , alors, en considérant la fonction  $g$  définie pour  $x \neq x_0$  par :  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  et prolongée par continuité en  $x_0$  :  $\alpha_p(f, x_0) = \alpha_p(g, x_0) + 1$ .

Le comportement de l'exposant de Hölder ponctuel sous l'effet d'une division par  $x$  et la proposition 3.3 nous donnent un “algorithme” de recherche (qui se termine à condition de ne pas analyser de fonction  $C^\infty$ ) en supposant que l'on ait une méthode de calcul d'une  $\liminf$  ou d'une limite <sup>2</sup> : voir l'algorithme 1, qui décrit la recherche de l'exposant ponctuel de  $f$  en 0 (Il suffit de considérer  $f(x - x_0)$  pour se ramener à ce calcul).

En revanche, le comportement de l'exposant de Hölder ponctuel sous l'effet d'une intégration ou d'une dérivation est imprévisible : ainsi, en considérant les fonctions  $f_1^\beta$  et  $f_2^{\beta,\gamma}$  de la sous-partie 3.1.1 et en supposant  $\beta > 1 - \gamma$  pour qu'elles soient dérivables :  $\alpha_p(f_1^\beta) = \alpha_p(f_2^{\beta,\gamma})$ , mais  $\alpha_p((f_1^\beta)', 0) = \beta - 1$  et  $\alpha_p((f_2^{\beta,\gamma})', 0) = \beta - \gamma - 1$ . La connaissance de  $\alpha_p(f)$  ne permet pas de déduire  $\alpha_p(f')$ . On peut seulement assurer que  $\alpha_p(f') \leq \alpha_p(f) - 1$ .

---

<sup>2</sup>A partir de la caractérisation de  $\alpha_p$  en termes de coefficients d'ondelettes donnée dans [Jaf89, Jaf04], il est aussi possible d'exprimer directement  $\alpha_p$  comme une  $\liminf$  sur les coefficients d'ondelettes, à condition que l'ondelette analysante ait suffisamment de moments nuls.

---

**Algorithmme 1** Calcul de l'exposant de Hölder ponctuel  $\alpha_p(f, 0)$ 

---

```
 $m \leftarrow 0$ 
 $v \leftarrow \liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\log |f(x) - f(0)|}{\log |x|}$ 
tant que  $v \geq 1$  faire
   $m \leftarrow m + 1$ 
  si  $f$  est dérivable au point 0 alors
     $g(0) \leftarrow f'(0)$ 
    pour tout  $x \neq 0$  faire
       $g(x) \leftarrow \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 
    fin pour
     $f \leftarrow g$ 
     $v \leftarrow \liminf_{x \rightarrow 0} \frac{\log |f(x) - f(0)|}{\log |x|}$ 
  sinon
     $v \leftarrow 0$ 
  fin si
fin tant que
 $\alpha_p(f, 0) \leftarrow m + v$ 
```

---

### 3.1.2 Exposant de Hölder local

L'exposant de Hölder local a été introduit dans [GL98]. De manière analogue à la partie 3.1.1, on définit les espaces de Hölder locaux afin d'introduire l'exposant de Hölder local à partir de ces espaces.

#### Définition et propriétés

**Définition 3.4.** Soit  $\alpha \in (0, 1)$ .

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

$f$  appartient à l'espace de Hölder local  $D^\alpha(x_0)$  s'il existe  $\epsilon > 0$  et  $C \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $(t, h)$ ,  $|t| < \epsilon$  et  $|h| < \epsilon$  :

$$|f(x_0 + t + h) - f(x_0 + t)| \leq C |h|^\alpha \quad (3.1)$$

A l'aide de l'inégalité triangulaire, on voit facilement qu'il est suffisant que la relation (3.1) soit vérifiée pour  $x_0 + t + h$  compris entre  $x_0$  et  $x_0 + t$  pour avoir  $f \in D^\alpha(x_0)$ . On peut donc faire la remarque suivante :

**Remarque 3.3.** Soit  $\alpha \in (0, 1)$ .

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

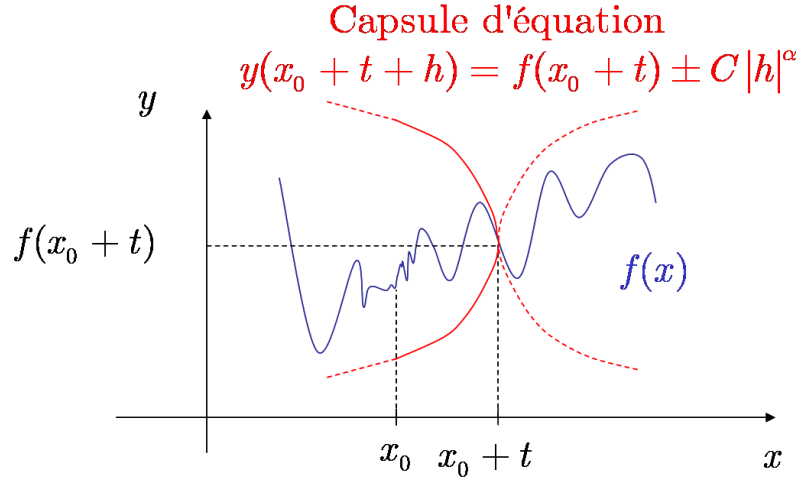


FIG. 3.2 –  $f$  appartient à l'espace de Hölder local  $D^\alpha(x_0)$  si son graphe est contenu dans l'enveloppe d'équation  $y(t + x_0 + h) = f(x_0 + t) \pm C \cdot |h|^\alpha$  pour tout  $t$  dans  $[x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon]$

$f$  appartient à l'espace de Hölder local  $D^\alpha(x_0)$  si, et seulement s'il existe  $\epsilon > 0$  et  $C \in \mathbb{R}$  tels que pour tout  $(t, h)$ , de même signe,  $|h| \leq |t| < \epsilon$  :

$$|f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)| \leq C |h|^\alpha$$

La figure 3.2 montre une interprétation graphique de la définition 3.4 : pour  $t$  assez petit, le graphe de  $f$  doit se trouver dans la capsule d'équation  $f(x_0 + t) \pm C \cdot |h|^\alpha$  où  $h = x - (x_0 + t)$ . D'après la remarque précédente, les parties en pointillé sont “inutiles”.

De même que précédemment, la définition 3.4 appliquée brutalement avec  $\alpha > 1$  serait peu intéressante puisque les espaces définis ne contiendraient que des fonctions de dérivée nulle sur un voisinage de  $x_0$ , c'est à dire constantes. Il est nécessaire de dériver  $f$  pour généraliser la définition précédente.

**Définition 3.5.** Soit  $\alpha \in (0, 1)$  et  $m \in \mathbb{N}$ .

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

$f \in D^{\alpha+m}(x_0)$  si  $f$  est  $m$  fois dérivable sur un voisinage de  $x_0$  et :

$$f^{(m)} \in D^\alpha(x_0).$$

On a également l'équivalent de la proposition 3.1 :

**Proposition 3.4.** *Pour tous  $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$  :*

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \Rightarrow D^{\alpha_2}(x_0) \subset D^{\alpha_1}(x_0)$$

De même que les espaces ponctuels, les espaces de Hölder locaux en un point donné sont “emboîtés” les uns dans les autres et l’ensemble des  $\alpha$  tels que  $f \in D^\alpha(x_0)$  peut être décrit de manière simple par sa borne supérieure, l’exposant de Hölder local.

**Définition 3.6.** *Soit  $f$  une fonction et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . L’exposant de Hölder local de  $f$  en  $x_0$  est :*

$$\alpha_l(f, x_0) = \sup\{\alpha \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{N} : f \in D^\alpha(x_0)\}$$

avec la convention :  $\sup(\emptyset) = 0$ .

L’exposant de Hölder local est lié à la dérivabilité de la fonction autour du point considéré :

**Proposition 3.5.** *Si  $f$  est  $C^\infty$  sur un voisinage de  $x_0$ , alors  $\alpha_l(f, x_0) = +\infty$ .*

*Sinon,  $\alpha_p(f, x_0) \in [m, m+1]$ , où  $m$  est le plus grand entier tel que  $f$  est de classe  $C^m$  sur un voisinage de  $x_0$ .*

Enfin, on peut exprimer  $\alpha_l$  à l’aide d’une  $\liminf$  :

**Proposition 3.6.** *Soit  $f$  une fonction,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .*

*En supposant  $\alpha_p(f) < +\infty$ , soit  $m$  le plus grand entier tel que  $f$  est  $C^m$  sur un voisinage de  $x_0$ .*

*Alors, en notant  $v(x) = \min(\max(0, x), 1)$  :*

$$\alpha_p(f, x_0) = m + v \left( \liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \frac{\log |f^{(m)}(x_0 + t + h) - f^{(m)}(x_0 + t)|}{\log |h|} \right)$$

*En particulier, si  $\alpha_l(f, x_0) \in (0, 1)$  alors :*

$$\alpha_p(f, x_0) = \liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \frac{\log |f(x_0 + t + h) - f(x_0 + t)|}{\log |h|}$$

La démonstration est analogue à celle de la proposition 3.3.



## Exemples et interprétation

Considérons les fonctions  $f_1^\beta$ ,  $f_2^{\beta,\gamma}$  et  $f_3^\beta$  de la partie 3.1.1.

Calculons l'exposant local de  $f_2^{\beta,\gamma}$ , en supposant  $\beta > 0$  et  $\gamma \in (0, 1)$ .

Pour tous  $t \in (0, 1)$  et  $h \in (0, t)$  :

$$f_2^{\beta,\gamma}(t) - f_2^{\beta,\gamma}(t-h) = t^\gamma [\sin t^{-\beta} - \sin(t-h)^{-\beta}] + r(t, h)$$

avec  $|r(t, h)| \leq h^\gamma$ . On en déduit :

$$\left| f_2^{\beta,\gamma}(t) - f_2^{\beta,\gamma}(t-h) \right| \leq t^\gamma \min(2, t^{-\beta} - (t-h)^{-\beta}) + h^\gamma$$

$$\left| f_2^{\beta,\gamma}(t) - f_2^{\beta,\gamma}(t-h) \right| \leq 2.t^\gamma \min(1, h.t^{-\beta-1}) + h^\gamma$$

Pour  $h$  fixé, la fonction  $t \rightarrow \min(t^\gamma, h.t^{(\gamma-1)-\beta})$  est le minimum d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante. Les deux sont égales pour  $t = h^{\frac{1}{1+\beta}}$ , donc  $t \rightarrow \min(t^\gamma, h.t^{(\gamma-1)-\beta})$  atteint son maximum en ce point. On en déduit :

$$\left| f_2^{\beta,\gamma}(t) - f_2^{\beta,\gamma}(t-h) \right| \leq 2.h^{\frac{\gamma}{1+\beta}} + h^\gamma.$$

$f_2^{\beta,\gamma}$  est paire, donc la même majoration est valable pour  $t \in (-1, 0)$  et  $h \in [t, 0)$ .

On en déduit  $f_2^{\beta,\gamma} \in D^{\frac{\gamma}{1+\beta}}(0)$  donc  $\alpha_l(f_2^{\beta,\gamma}, 0) \geq \frac{\gamma}{1+\beta}$ .

Il reste à minorer  $\alpha_l(f_2^{\beta,\gamma}, 0)$ . Au vu de ce qui précède, il est naturel de considérer  $|f(t) - f(t-h)|$  avec  $t = h^{\frac{1}{1+\beta}}$ . Posons  $v(h) = f_2^{\beta,\gamma}(h^{\frac{1}{1+\beta}}) - f_2^{\beta,\gamma}(h^{\frac{1}{1+\beta}} - h)$ .

$$v(h) = h^{\frac{\gamma}{1+\beta}} \left[ \sin h^{-\frac{\beta}{1+\gamma}} - \sin \left( h^{-\frac{\beta}{1+\beta}} \left( 1 - h^{\frac{\beta}{1+\beta}} \right)^{-\beta} \right) \right] + r(h^{\frac{1}{1+\beta}}, h)$$

Quand  $h$  tend vers 0 :

$$v(h) = h^{\frac{\gamma}{1+\beta}} \left[ \sin h^{-\frac{\beta}{1+\gamma}} - \sin \left( h^{-\frac{\beta}{1+\beta}} + \beta + o(1) \right)^{-\beta} \right] + o(h^{\frac{\gamma}{1+\beta}}).$$

On en déduit, en posant  $h_n = (2\pi n)^{\frac{1+\beta}{\beta}}$  :  $|v(h_n)| = \sin(\beta).h_n^{\frac{\gamma}{1+\beta}} + o(h_n^{\frac{\gamma}{1+\beta}})$ , donc  $\alpha_l(f_2^{\beta,\gamma}) = \frac{\gamma}{1+\gamma}$

Les exposants de Hölder locaux de  $f_1^\beta$  et  $f_3^\beta$  sont immédiats. Nous avons donc

les résultats suivants :

$$\begin{aligned}\alpha_l(f_1^\beta, x) &= \begin{cases} \beta & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \alpha_l(f_2^{\beta, \gamma}, x) &= \begin{cases} \frac{\beta}{1+\gamma} & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \\ \alpha_l(f_3^\beta, x) &= 0 \quad \text{pour tout } x\end{aligned}$$

On constate cette fois-ci que  $\alpha_l$  est sensible au comportement de la fonction près de  $x_0$ . Ainsi, cet exposant permet de distinguer les fonctions  $f_1^\beta$  et  $f_2^{\beta, \gamma}$ . En revanche, cette sensibilité au comportement de la fonction près du point l'empêche de distinguer des points réguliers dans un environnement irrégulier, comme on peut le voir sur le cas de  $f_3^\beta$ . Une autre manière de voir ceci est de réaliser que la fonction  $x \rightarrow \alpha_l(x)$  est semi-continue inférieurement [GL98]

### Comportement de l'exposant de Hölder local sous l'effet d'une transformation de la fonction

L'exposant de Hölder local est stable par intégration : si  $f$  est intégrable, alors  $\alpha_l(\int f, x_0) = 1 + \alpha_l(f, x_0)$ .

Inversement, si une fonction  $f$  est dérivable sur un voisinage de  $x_0$ , alors :  $\alpha_p(f, x_0) = \alpha_p(f', x_0) + 1$ .

En revanche, l'exposant de Hölder local n'est pas stable par multiplication par les puissances de  $x$  :  $\alpha_l(f_1^{\beta/(1+\gamma)}, 0) = \alpha_l(f_2^{\beta, \gamma}, 0) = \frac{\beta}{1+\gamma}$  mais  $\alpha_l(x.f_1^{\beta/(1+\beta)}, 0) = 1 + \frac{\beta}{1+\gamma}$  alors que  $\alpha_l(x.f_2^{\beta, \gamma}, 0) = \frac{1+\beta}{1+\gamma}$ .

Le comportement de l'exposant de Hölder local et la proposition 3.6 donnent un "algorithme" de recherche de cet exposant, en supposant que l'on ait une méthode de calcul d'une  $\liminf$  <sup>3</sup>. L'algorithme 2 décrit l'exposant local de  $f$  en 0 (il suffit de considérer  $f(x - x_0)$  pour se ramener à ce calcul et calculer l'exposant de  $f$  en  $x_0$ ) :

---

<sup>3</sup>A partir de la caractérisation de  $\alpha_l$  en termes de coefficients d'ondelettes donnée dans [Mey90b, LS04], il est aussi possible d'exprimer directement  $\alpha_l$  comme une  $\liminf$  sur les coefficients d'ondelettes, à condition que l'ondelette analysante ait suffisamment de moments nuls.

---

**Algorithmme 2** Calcul de l'exposant de Hölder local  $\alpha_l(f, 0)$ 

---

```
 $m \leftarrow 0$ 
 $v \leftarrow \liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \frac{\log |f(t+h) - f(t)|}{\log |h|}$ 
tant que  $v \geq 1$  faire
   $m \leftarrow m + 1$ 
  si  $f$  est dérivable sur un voisinage  $V$  de 0 alors
    pour tout  $x \in V$  faire
       $g(x) \leftarrow f'(x)$ 
    fin pour
     $f \leftarrow g$ 
     $v \leftarrow \liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \frac{\log |f(t+h) - f(t)|}{\log |h|}$ 
  sinon
     $v \leftarrow 0$ 
  fin si
fin tant que
 $\alpha_l(f, 0) \leftarrow m + v$ 
```

---

### 3.1.3 “Insuffisance” des deux exposants

L'exposant de Hölder local et l'exposant de Hölder ponctuel fournissent des renseignements complémentaires : l'exposant de Hölder ponctuel décrit la régularité de la fonction au point  $x_0$  sans tenir compte de son comportement plus ou moins irrégulier au voisinage de ce point tandis que l'exposant de Hölder local décrit la régularité au voisinage de  $x_0$ . L'exposant de Hölder local est stable sous l'effet d'une dérivation tandis que l'exposant de Hölder ponctuel est stable sous l'effet d'une intégration.

Cependant, on voit que le couple  $(\alpha_p(f, x_0), \alpha_l(f, x_0))$  ne permet de déduire ni  $(\alpha_p(f', x_0), \alpha_l(f', x_0))$  ni  $(\alpha_p(x.f, x_0), \alpha_l(x.f, x_0))$ . L'information donnée par ces deux exposants apparaît donc comme instable, à la fois par une multiplication et par une intégration.

Par ailleurs, de nombreux exposants, comme l'exposant de chirp [Mey98], l'exposant d'oscillations [AAM98] ou l'exposant “weak scaling” [Mey98] (voir partie 2.2.4) ont été définis, ces exposants pouvant avoir un comportement différent de  $\alpha_p$  et  $\alpha_l$ .

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, la frontière 2-microlocale permet de décrire la régularité d'une fonction de manière très complète. De plus, son comportement est stable à la fois par dérivation et multiplication par les puissances de  $x$ . Nous développons dans la section suivante une approche “temporelle” des

espaces 2-microlocaux.

## 3.2 Caractérisation en temps des espaces 2-microlocaux

### 3.2.1 Caractérisation pour $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$

Dans [KL02], certains espaces  $K_{x_0}^{s,s'}$ , ont été introduits dans le but de caractériser la régularité d'une fonction à partir de ses accroissements. L'égalité entre les espaces  $K_{x_0}^{s,s'}$  et  $C_{x_0}^{s,s'}$  pour  $(s, s + s') \in (0, 1)^2$  a été montrée dans [SL03].

On rappelle ci-dessous la définition originale des espaces  $K_{x_0}^{s,s'}$ . De même que pour les espaces de Hölder ponctuel et locaux, on se restreint d'abord à certains espaces 2-microlocaux, avant de généraliser la définition :

**Définition 3.7.** *Soit  $f$  une fonction.*

*Soit  $s \in (0, 1)$  et  $s'$  tel que  $s + s' \in [0, 1)$ .*

*On dit que  $f$  appartient à l'espace  $K_{x_0}^{s,s'}$  s'il existe  $\delta > 0$  et  $C > 0$  tels que, pour tous  $(x, y)$  avec  $|x - x_0| < \delta$  et  $|y - x_0| < \delta$  :*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^{s+s'}(|x - y| + |x - x_0|)^{-s'}. \quad (3.2)$$

Pour des raisons de facilité d'écriture, on utilisera des notations légèrement différentes de celles de [KL02] et [SL03]. En effet, il est plus commode d'utiliser les paramètres  $(s, \sigma)$  (où  $\sigma = s + s'$ ) que les paramètres  $(s, s')$  de la définition 2.2.

On définit donc les espaces  $K_\sigma^s(x_0)$  :

**Définition 3.8.** *Pour tous  $s \in (0, 1)$  et pour tout  $\sigma \in [0, 1)$  :*

$$K_\sigma^s(x_0) = K_{x_0}^{s, \sigma-s}$$

Les notations avec  $x$  et  $y$  étant un peu lourdes, on effectue le changement de variables  $t = x$  et  $h = x - y$ , ceci afin d'obtenir la nouvelle caractérisation suivante des espaces  $K_\sigma^s(x_0)$ , plus facile à manipuler :

**Proposition 3.7.** *Soit  $f$  une fonction.*

*Soit  $s \in (0, 1)$  et  $\sigma \in [0, 1)$ .*

$f$  appartient à l'espace  $K_\sigma^s(x_0)$  si, et seulement s'il existe  $\epsilon > 0$  et  $C \in \mathbb{R}$  tels que, pour tous  $t$  et  $h$  de même signe avec  $0 < |h| \leq |t| < \epsilon$  :

$$|f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)| \leq C|h|^\sigma |t|^{s-\sigma}. \quad (3.3)$$

*Preuve.* Si  $f \in K_\sigma^s(x_0)$  alors pour tous  $(t, h)$  de même signe avec  $0 < |h| \leq |t| < \epsilon$ , on applique l'équation 3.2 à  $x = x_0 + t$  et  $y = x_0 + t - h$ . Il vient :

$$|f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)| \leq C|h|^\sigma (|t| + |h|)^{s-\sigma}.$$

Comme  $|h| \leq |t|$  :

$$|f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)| \leq 2^{|s-\sigma|} C|h|^\sigma |t|^{s-\sigma}.$$

Inversement, montrons que la condition est suffisante. Considérons  $x$  et  $y$  tels que  $x - x_0 \in (0, \epsilon)$  et  $y \in [x_0, x)$ . Si on pose  $t = x - x_0$  et  $h = x - y$ , on a bien  $t$  et  $h$  de même signe et  $|h| \leq |t|$ . La condition nous donne donc :  $|f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)| \leq C|x - y|^\sigma |x - x_0|^{s-\sigma}$  ce qui implique l'inégalité 3.2 avec  $C' = 2^{|\sigma-s|}C$ , en remarquant que  $|x - x_0| \leq |x - x_0| + |x - y| \leq 2|x - x_0|$ .

Considérons maintenant  $x$  et  $y$  tels que  $x \in (-\epsilon, x_0)$  et  $y > x_0$  tel que  $|y - x_0| \leq |x - x_0|$ .

Alors :  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)|$ . En appliquant (3.3) avec  $t = h = x - x_0$  et avec  $t = h = y - x_0$  on obtient :

$$|f(x) - f(y)| \leq 2C|x - x_0|^s$$

Comme  $|x - x_0| \leq |x - y| \leq 2|x - x_0|$  il vient :

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq 2 \cdot 2^{|s|} C |x - y|^s \\ |f(x) - f(y)| &\leq 2 \cdot 2^{|s|} C |x - y|^\sigma \cdot 3^{|s-\sigma|} (|x - y| + |x - x_0|)^{s-\sigma} \end{aligned}$$

On peut faire les mêmes raisonnements en remplaçant  $x - x_0$  par  $x_0 - x$  et  $y - x_0$  par  $x_0 - y$ . Ceci nous donne donc l'existence d'une constante  $C$  et de  $\delta > 0$  telles que, pour tous  $(x, y)$  vérifiant  $0 < |y - x_0| \leq |x - x_0| \leq \delta$ , l'équation (3.3) est vérifiée.

Enfin, on remarque que  $|x - y| + |x - x_0| \leq 2(|x - y| + |y - x_0|)$ . La condition

de la définition 3.7 est donc symétrique en  $x$  et  $y$ . Ceci nous permet de couvrir le dernier cas  $|y - x_0| > |x - x_0|$  en intervertissant  $x$  et  $y$ .  $\square$

On réécrit l'égalité entre les espaces  $K_{x_0}^{s,s'}$  pour  $(s, s + s') \in (0, 1)^2$  et  $C_{x_0}^{s,s'}$  pour  $(s, s + s') \in (0, 1)^2$  avec les notations de la définition 3.8 :

**Théorème 3.1.** *[SL03] Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$*

*Soit  $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$ .*

$$K_\sigma^s(x_0) = C^{s, \sigma - s}(x_0)$$

La proposition 3.7 concerne les couples  $(s, \sigma)$  où  $s \in (0, 1)$  et  $\sigma \in [0, 1)$ .

Cependant, le théorème 3.1 est vrai uniquement pour  $s \in (0, 1)$  et  $\sigma \in (0, 1)$ . En effet, il est faux pour  $\sigma = 0$ . Les espaces  $C_{x_0}^{s, 0-s}$  sont différents des espaces  $K_0^s(x_0)$ . Plus précisément,  $K_0^s(x_0)$  est strictement inclus dans  $C_{x_0}^{s, -s}$ , les espaces  $C_{x_0}^{s, -s}$  contenant des distributions (voir [Jaf91] pour de tels contre-exemples). Ceci n'a cependant pas d'incidence sur le fait qu'on peut caractériser la frontière 2-microlocale à l'aide des espaces  $K_\sigma^s(x_0)$  (égalité (3.8)). De plus, il sera souvent commode dans les démonstrations d'utiliser les espaces  $K_0^s(x_0)$ .

Enfin, grâce à la remarque 3.1 et la proposition 3.7, on peut voir que, pour tout  $\alpha \in (0, 1)$  :

$$K_0^\alpha(x_0) = C^\alpha(x_0).$$

De même, grâce à la remarque 3.3 et la proposition 3.7, on peut voir que, pour tout  $\alpha \in (0, 1)$  :

$$K_\alpha^\alpha(x_0) = D^\alpha(x_0).$$

En prenant  $t = h$  dans les hypothèses de la proposition 3.7, on voit qu'elles impliquent la continuité de  $f$  au point  $x_0$ . Il sera parfois pratique, lorsqu'on sait déjà que  $f$  est continue au point  $x_0$ , de se dispenser de traiter le cas  $t = h$  :

**Remarque 3.4.** *Soit  $f$  une fonction. Soit  $s \in (0, 1)$  et  $\sigma \in [0, 1)$ .  $f$  appartient à l'espace  $K_\sigma^s(x_0)$  équivaut à :*

*$f$  est continue en  $x_0$  et il existe  $\epsilon > 0$  et  $C \in \mathbb{R}$  tels que, pour tous  $t$  et  $h$  de même signe avec  $0 < |h| < |t| < \epsilon$  :*

$$|f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)| \leq C|h|^\sigma |t|^{s-\sigma}.$$

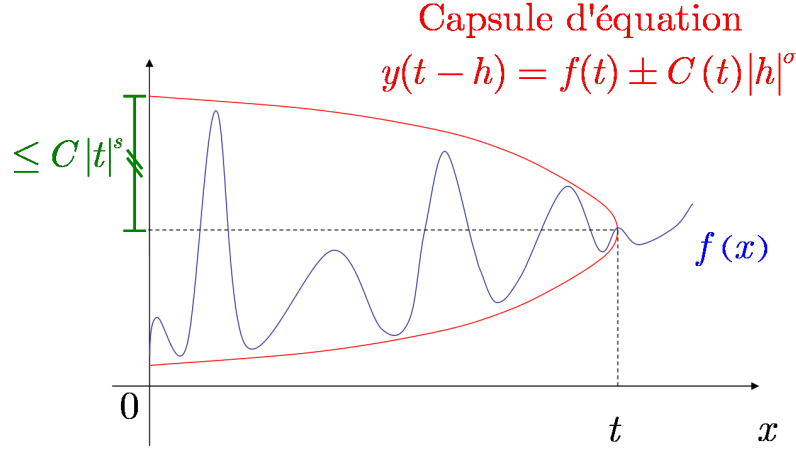


FIG. 3.3 – Interprétation graphique de l'espace 2-microlocal  $K_\sigma^s(x_0)$

Par la suite, au lieu d'écrire " $t$  et  $h$  de même signe et  $0 < |h| \leq |t|$ ", on écrira souvent de manière plus concise : " $\frac{t}{h} \geq 1$ ". De même, au lieu d'écrire " $t$  et  $h$  de même signe et  $0 < |h| < |t|$ ", on écrira plutôt " $\frac{t}{h} > 1$ ".

On peut interpréter graphiquement l'appartenance aux espaces 2-microlocaux (fig 3.3). On choisit  $x_0 = 0$  pour simplifier les notations. On doit avoir :

$$|f(t-h) - f(t)| \leq C|h|^\sigma |t|^{s-\sigma}.$$

Ceci signifie que, pour tout  $t > 0$ , le graphe de  $f$  doit se trouver dans la "capsule" d'équation  $y(t-h) = f(t) \pm C(t).h^\sigma$ , avec  $C(t) \leq C.|t|^{s-\sigma}$ . A l'abscisse  $x_0$ , la largeur de cette capsule doit donc être inférieure à  $2.C.|t|^s$ .

On voit ainsi que le paramètre  $\sigma$  correspond à la forme des capsules, tandis que le paramètre  $s$  correspond à la vitesse à laquelle la hauteur de ces capsules décroît (ou croît si  $s - \sigma < 0$ ).

Il est possible de montrer l'équivalent des propositions 2.1 et 2.2 du chapitre 2 pour  $(s, \sigma)$  dans  $(0, 1) \times [0, 1)$  en utilisant la caractérisation temporelle des espaces 2-microlocaux :

**Proposition 3.8.** Soient  $(s_1, s_2) \in (0, 1)^2$  et  $(\sigma_1, \sigma_2) \in [0, 1)^2$ .

Si  $s_1 \leq s_2$  et  $\sigma_1 \leq \sigma_2$ , alors  $K_{\sigma_2}^{s_2}(x_0) \subset K_{\sigma_1}^{s_1}(x_0)$

*Preuve.* Si une fonction  $f$  est dans  $K_{\sigma_1}^{s_1}(x_0)$  alors, pour tous  $(t, h)$  tels que  $t/h \geq 1$

et  $|t| \leq \min(\epsilon, 1)$  :

$$|f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)| \leq C \cdot |t|^{s_1} \left| \frac{h}{t} \right|^{\sigma_1} \leq C \cdot |t|^{s_2} \left| \frac{h}{t} \right|^{\sigma_2}$$

□

**Proposition 3.9.** *Soit  $f$  une fonction.*

*L'ensemble des  $(s, \sigma) \in (0, 1) \times [0, 1)$  tels que  $f \in K_\sigma^s(x_0)$  est convexe.*

*Preuve.* Soient  $(s_1, s_2) \in (0, 1)^2$  et  $(\sigma_1, \sigma_2) \in [0, 1)^2$  tels que  $f$  est dans  $K_{\sigma_1}^{s_1}(x_0) \cap K_{\sigma_2}^{s_2}(x_0)$  et  $\lambda \in [0, 1]$ .

Il existe  $C$  et  $\epsilon > 0$  tels que pour tout  $(t, h)$  vérifiant  $t/h > 1$  et  $|t| \leq \epsilon$  :

$$|f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)|^\lambda \leq C \cdot |t|^{\lambda \cdot (s_1 - \sigma_1)} |h|^{\lambda \cdot \sigma_1}$$

$$|f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)|^{1-\lambda} \leq C \cdot |t|^{(1-\lambda) \cdot (s_2 - \sigma_2)} |h|^{(1-\lambda) \cdot \sigma_2}$$

On obtient le résultat en multipliant terme à terme les deux inégalités. □

### 3.2.2 Caractérisation pour $s$ et $\sigma$ positifs

De manière analogue à la définition des espaces de Hölder ponctuels ou locaux, la proposition 3.7 appliquée brutalement pour  $s > 1$  donne des fonctions de dérivée nulle au point  $x_0$ , tandis qu'elle donne des fonctions constantes sur un voisinage de  $x_0$  quand  $\sigma > 1$ .

Il est donc nécessaire de considérer les approximations polynômiales et les dérivées de la fonction  $f$  pour caractériser les espaces 2-microlocaux pour  $\sigma > 1$  ou  $s > 1$ .

Le “but” de cette définition est de retrouver les espaces  $C_{x_0}^{s, \sigma-s}$  lorsque  $(s, \sigma) \in (\mathbb{R}_+ - \mathbb{N})^2$ . Une définition valable sous l'hypothèse  $\lfloor s \rfloor \geq \lfloor \sigma \rfloor$  a été donnée dans [SL03] mais nous en utilisons une autre, plus générale puisqu'elle est valable sans cette hypothèse. Le théorème 3.2 est donc une nouvelle caractérisation en temps des espaces 2-microlocaux.

De même que dans la partie 3.2.1, il est plus commode d'avoir une notation utilisant les paramètres  $s$  et  $\sigma$ .

**Définition 3.9.** *Soient  $(s, \sigma) \in (0, 1) \times [0, 1)$ , soient  $(S, L) \in \mathbb{N}^2$ .*



Une fonction  $f$  appartient à l'espace  $K_{\sigma+L}^{s+S}(x_0)$  si :  
 $f$  est continue en  $x_0$  et il existe un polynôme  $P$  et une fonction  $\mathcal{R}$  telles que,  
pour tout  $x \neq 0$  :

$$f(x_0 + x) = P(x) + x^{S-L}\mathcal{R}(x)$$

où  $\mathcal{R}$  est de plus  $L$  fois dérivable sur un voisinage de 0 et vérifie  $\mathcal{R}^{(L)} \in K_{\sigma}^s(0)$ .

**Remarque 3.5.** Si un tel polynôme existe, on peut choisir  $\deg P \leq S - L$  et  $\mathcal{R}(0) = 0$  pour s'assurer de l'unicité de  $P$ .  $P$  est alors le développement limité d'ordre  $S - L$  de  $f$  en 0 si  $S \geq L$  et est le polynôme nul si  $S < L$ .

**Remarque 3.6.** On peut également choisir  $\deg P \leq S$  et imposer :  $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}'(0) = \mathcal{R}''(0) = \dots = \mathcal{R}^{(L)}(0) = 0$ .

Par exemple, pour  $S = L = 1$  et  $f(x) = 1 + x + x^{3/2}$  on peut choisir soit  $P(x) = 1$  et  $\mathcal{R}(x) = x + x^{3/2}$  soit  $P(x) = 1 + x$  et  $\mathcal{R}(x) = x^{3/2}$ .

Le lien avec les espaces 2-microlocaux de la partie précédente peut être fait immédiatement, en anticipant un peu sur le comportement des espaces  $K_{\sigma}^s(x_0)$  sous l'effet d'une division par  $(x - x_0)$  ou d'une dérivation :

**Théorème 3.2.** Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$

Soit  $(s, \sigma) \in (\mathbb{R}_+ - \mathbb{N})^2$ .

$$K_{\sigma}^s(x_0) = C_{x_0}^{s, \sigma-s}$$

*Preuve.* Le théorème 3.1 nous donne déjà le résultat si  $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$ . Pour le cas  $(s, \sigma) \in (\mathbb{R}_+ - \mathbb{N})^2$ , on peut anticiper un peu et admettre les propositions 3.12 et 3.13. On se ramène alors facilement au cas  $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$  avec ces deux propositions et les théorèmes 2.4 et 2.5.  $\square$

On vérifie en comparant les définitions 3.2 et 3.9 que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$

$$K_{\alpha}^{\alpha}(x_0) = D^{\alpha}(x_0)$$

De même, en comparant les définitions 3.5 et 3.9, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$

$$K_0^{\alpha}(x_0) = C^{\alpha}(x_0)$$

On retrouve bien les espaces de Hölder ponctuels et locaux “dans” les espaces  $K_{\sigma}^s(x_0)$ .

Insistons sur le fait que les espaces  $K_0^\alpha(x_0)$  sont strictement inclus dans les espaces  $C_{x_0}^{\alpha, 0-\alpha}$ . En effet, le théorème 3.2 est vrai pour tout  $(s, \sigma) \in (\mathbb{R}_+ - \mathbb{N})^2$ , mais faux dans le cas  $\sigma = 0$ .

### 3.2.3 Effet d'une multiplication par $x$ ou d'une intégration

De même que les espaces de Hölder ponctuels, les espaces  $K_\sigma^s(x_0)$  ont un comportement stable sous l'effet d'une multiplication par  $(x - x_0)$ , (proposition 3.10). Ils ont aussi, de même que les espaces de Hölder locaux, un comportement stable sous l'effet d'une intégration (proposition 3.11). On peut montrer ces propriétés à partir de la caractérisation en temps de ces espaces.

**Proposition 3.10.** *Soit  $f$  une fonction continue et  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Soit  $g$  définie par :*  
 $g(x) = (x - x_0).f(x)$ .

*Soient  $(s, \sigma) \in (0, 1) \times [0, 1)$  et  $(S, L) \in \mathbb{N}^2$ .*

$$f \in K_{\sigma+L}^{s+S}(x_0) \Leftrightarrow g \in K_{\sigma+L}^{s+S+1}(x_0)$$

*Preuve.* Si  $f \in K_{\sigma+L}^{s+S}(x_0)$  :

$$f(x_0 + x) = P(x) + x^{S-L}\mathcal{R}(x)$$

où  $\mathcal{R}^{(L)} \in K_\sigma^s(0)$ .

On en déduit  $g(x_0 + x) = x.P(x) + x^{S+1-L}\mathcal{R}(x)$  donc  $g \in K_{\sigma+L}^{s+S+1}(x_0)$ .

inversement, si  $g \in K_{\sigma+L+1}^{s+S}(x_0)$  :

$$g(x_0 + x) = Q(x) + x^{S-L+1}\mathcal{R}(x)$$

où  $\mathcal{R} \in K_\sigma^s(0)$  et  $\mathcal{R}(0) = \dots = \mathcal{R}^{(L)}(0) = 0$ .

Comme  $g(x_0) = 0$ ,  $Q(0) = 0$  donc  $Q = X.P$ . On en déduit  $f(x_0 + x) = P(x) + x^{S-L}\mathcal{R}(x)$  donc  $f \in K_{\sigma+L}^{s+S}(x_0)$ .  $\square$

**Proposition 3.11.** *Soit  $f$  une fonction intégrable,  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $F$  une primitive de  $f$ .*

*Soient  $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$  et  $(S, L) \in \mathbb{N}^2$ .*

$$f \in K_{\sigma+L}^{s+S}(x_0) \Leftrightarrow F \in K_{\sigma+L+1}^{s+S+1}(x_0)$$

La démonstration de la proposition 3.11 nécessite l'utilisation du lemme 3.1.

**Lemme 3.1.** *Soient  $(s, \sigma) \in (0, 1) \times [0, 1)$ . Soit  $g$  une fonction  $k$  fois dérivable sur un voisinage de 0.*

*Si  $g^{(k)} \in K_\sigma^s(0)$  et  $g(0) = g'(0) = \dots = g^{(k-1)}(0) = 0$  alors la fonction  $h$  définie par  $h(0) = g^{(k)}(0)$  et, pour  $x \neq 0$  :*

$$h(x) = \frac{g(x)}{x^k}$$

*est dans  $K_\sigma^s(0)$ .*

*Preuve.* Pour tout  $x \neq 0$  :

$$h(x) = \frac{1}{x^k} \int_0^x \int_0^{t_k} \int_0^{t_{k-1}} \dots \int_0^{t_2} g^{(k)}(t_1) dt_1 dt_2 \dots dt_k$$

Par changements de variables  $u_i = t_i/x$  :

$$h(x) = \int_0^1 \int_0^{u_k} \int_0^{u_{k-1}} \dots \int_0^{u_2} g^{(k)}(u_1.x) du_1 du_2 \dots du_k$$

Pour  $(t, h) \in (-\epsilon, \epsilon)$ , avec  $t/h > 1$  :

$$|h(t-h) - h(t)| \leq \int_0^1 \int_0^{u_k} \int_0^{u_{k-1}} \dots \int_0^{u_2} C. |u_1.h|^\sigma |u_1.t|^{s-\sigma} du_1 du_2 \dots du_k$$

On obtient le résultat en sortant  $|h|^\sigma |t|^{s-\sigma}$  de l'intégrale et en appliquant la remarque 3.4 ( $h$  est continue en 0).  $\square$

*Démonstration de la proposition 3.11.* Si  $F \in K_{\sigma+L}^{s+S}(x_0)$ , alors :  $F(x + x_0) = P(x) + x^{S-L}\mathcal{R}(x)$ , où  $\mathcal{R}^{(L+1)} \in K_\sigma^s(0)$  et  $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}'(0) = \dots = \mathcal{R}^{(L+1)}(0) = 0$ .

En dérivant, pour  $x \neq 0$  :

$$f(x_0 + x) = P'(x) + x^{S-L}\mathcal{L}(x)$$

avec  $\mathcal{L}(x) = (S-L).x^{-1}\mathcal{R}(x) + \mathcal{R}'(x)$ . On vérifie qu'en posant  $\mathcal{L}(0) = 0$ , on a bien la continuité de  $\mathcal{L}$ .

En dérivant  $\mathcal{L}$  : il existe  $a_0 \dots a_{k-1}$  tels que, pour tout  $x \neq 0$  :

$$\mathcal{L}^{(L)}(x) = \sum_{k=0}^{L+1} a_k x^{-k} \mathcal{R}^{(L+1-k)}(x).$$

D'après le théorème de prolongement de la dérivée,  $\mathcal{L}$  est  $L$  fois dérivable en 0 et  $\mathcal{L}^{(L)}(0) = 0$ . En appliquant le lemme 3.1 aux dérivées successives de  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{L}^{(L)} \in K_\sigma^s(0)$ , donc  $f \in K_{\sigma+L}^{s+S}(x_0)$

Inversement, si  $f \in K_{\sigma+L}^{s+S}(x_0) : f(x_0+x) = P(x) + x^{S-L} \mathcal{R}(x)$  où  $\mathcal{R}^{(L)} \in K_\sigma^s(0)$  et  $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}'(0) = \dots = \mathcal{R}^{(L)}(0) = 0$ .

$$F(x_0+x) = \int_0^x P(u) du + F(x_0) + \int_0^x u^{S-L} \mathcal{R}(u) du$$

$$F(x_0+x) = Q(x) + x^{S-L} \mathcal{L}(x)$$

où  $Q$  est un polynôme et  $\mathcal{L}(x) = x^{S-L} \int_0^x u^{L-S} \mathcal{R}(u) du$ . Montrons que  $\mathcal{L}^{(L+1)} \in C_\sigma^s(0)$ .

En dérivant  $\mathcal{L}$  : il existe  $a_0 \dots a_{k-1}$  tels que, pour tout  $x \neq 0$  :

$$\mathcal{L}^{(L+1)}(x) = a_0 x^{-S-1} \int_0^x u^{S-L} \mathcal{R}(u) du + \sum_{j=0}^L a_j x^{-j} \mathcal{R}^{(L-j)}(x).$$

En appliquant le lemme 3.1 aux dérivées successives de  $\mathcal{R}$ , on voit que l'application  $g_1 : x \rightarrow \begin{cases} \sum_{j=0}^L a_j x^{-j} \mathcal{R}^{(L-j)}(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$  appartient à  $K_\sigma^s(0)$ .

Posons  $g_2(x) = x^{-S-1} \int_0^x u^{S-L} \mathcal{R}(u) du$  et  $g_2(0) = 0$ . Il faut montrer que  $g_2 \in K_\sigma^s(0)$ . Pour tout  $x \neq 0$  :

$$g_2(x) = \int_0^1 v^S \frac{\mathcal{R}(v.x)}{(v.x)^L} dv \tag{3.4}$$

D'après le lemme 3.1,  $t \rightarrow \frac{\mathcal{R}(t)}{t^L}$  appartient à  $K_\sigma^s(0)$ .

On en déduit que, pour tous  $(t, h) \in (-\epsilon, \epsilon)$  et pour  $t/h > 1$  :

$$|g_2(t) - g_2(t-h)| \leq \int_0^1 v^S . C . |vh|^\sigma . |th|^{s-\sigma} dv.$$

$|g_2(t) - g_2(t-h)| \leq C . |h|^\sigma . |t|^{s-\sigma}$ . On peut vérifier sur l'équation 3.4 que  $g_2$  est

continue en 0. D'après la remarque 3.4,  $g_2 \in K_\sigma^s(0)$ .

Enfin, d'après le théorème de prolongement de la dérivée,  $\mathcal{L}^{(L+1)}(0) = 0$  donc  $\mathcal{L}^{(L+1)} = g_1 + g_2$ .  $\mathcal{L}^{(L+1)}$  est la somme de deux fonctions de  $K_\sigma^s(0)$ , donc  $L^{(L+1)} \in K_\sigma^s(0)$ . On en déduit que  $F \in K_{\sigma+L+1}^{s+S+1}(x_0)$ .  $\square$

Les propositions 3.10 et 3.11 peuvent se mettre sous les formes suivantes :

**Proposition 3.12.** *Soit  $f$  une fonction. Soit  $g$  définie pour  $x \neq x_0$  par :*

$$g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

*Soient  $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$  et  $(S, L) \in \mathbb{N}^2$ .  $g$  est prolongeable par continuité en  $x_0$  et son prolongement appartient à  $K_{\sigma+L}^{s+S}(x_0)$  si, et seulement si  $f$  appartient à  $K_{\sigma+L}^{s+S+1}(x_0)$*

**Proposition 3.13.** *Soit  $f$  une fonction. Soient  $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$  et  $(S, L) \in \mathbb{N}^2$ .  $f$  est dérivable et  $f' \in K_{\sigma+L}^{s+S}(x_0)$  si, et seulement si  $f$  appartient à  $K_{\sigma+L+1}^{s+S+1}(x_0)$*

On a résumé les propositions 3.10, 3.11, 3.12 et 3.13 sur la figure 3.4 : par exemple, si  $f \in K_\sigma^s(0)$ , alors on obtiendra une fonction dans  $K_{\sigma+1}^{s+1}(0)$  en intégrant  $f$ . Une intégration correspond donc au vecteur de coordonnées  $(1, 1)$  dans le plan  $(s, \sigma)$ . Les espaces de Hölder locaux  $D^s(x_0)$  et ponctuels  $C^s(x_0)$  sont également représentés.

### 3.2.4 Propriétés des espaces 2-microlocaux

De même que les espaces de Hölder, les espaces 2-microlocaux sont “emboîtés”.

**Théorème 3.3.** *Pour tous  $(s_1, s_2) \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{N}$ , pour tous  $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}_+$  :*

$$\text{Si } s_1 \leq s_2 \text{ et } \sigma_1 \leq \sigma_2 \text{ alors } K_{\sigma_1}^{s_1}(x_0) \subset K_{\sigma_2}^{s_2}(x_0). \quad (3.5)$$

Le théorème 3.3 se déduit du théorème 3.2 et de la propriété correspondante (proposition 2.2) des espaces  $C_{x_0}^{s,s'}$ . Nous allons voir ci-dessous qu'il est aussi possible de la démontrer en restant dans le domaine temporel. Grâce à la proposition 3.8, on sait que l'énoncé (3.5) est vérifié pour  $(s, \sigma) \in (0, 1) \times [0, 1)$ . Les lemmes 3.2 et 3.3 ci-dessous permettent de “traverser” les droites d'équations  $\sigma = 1$  et  $s = 1$  pour arriver aux ensembles  $C_\sigma^s$  avec  $\lfloor s \rfloor + \lfloor \sigma \rfloor \leq 1$ . Enfin, dans

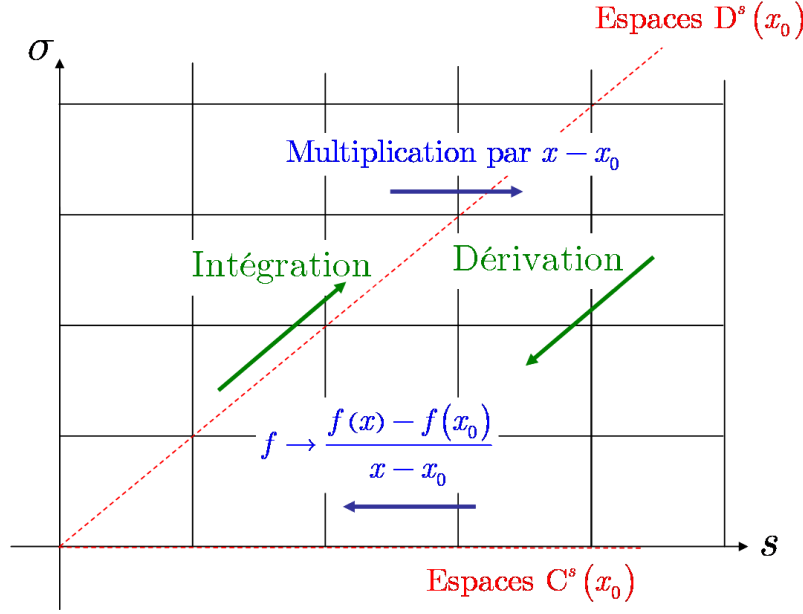


FIG. 3.4 – Effet d’une intégration, d’une dérivation, d’une multiplication ou d’une division par  $(x - x_0)$  sur l’appartenance d’une fonction aux espaces 2-microlocaux

les lemmes 3.4 et 3.5, on se ramène à ces ensembles grâce aux transformations étudiées dans la partie précédente.

**Lemme 3.2.** *Soient  $(s_0, \sigma_0) \in (0, 1) \times [0, 1)$ .*

*Si  $f \in K_{\sigma_0+1}^{s_0}(x_0)$ , alors pour tout  $\sigma \in (0, 1)$   $f \in K_{\sigma}^{s_0}(x_0)$ .*

*Preuve.* On suppose sans perte de généralité  $x_0 = 0$ .

$f(x) = x^{-1}\mathcal{R}(x)$  avec  $\mathcal{R}' \in K_{\sigma_0}^{s_0}(0)$  et  $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}'(0) = 0$ .

$$f(t-h) - f(t) = \frac{1}{t-h} \int_0^{t-h} \mathcal{R}'(u) du - \frac{1}{t} \int_0^t \mathcal{R}'(u) du$$

$$f(t-h) - f(t) = \left( \frac{1}{t-h} - \frac{1}{t} \right) \int_0^{t-h} \mathcal{R}'(u) du + \frac{1}{t} \int_{t-h}^t \mathcal{R}'(u) du$$

Or, pour tout  $u \in [0, t]$  :  $|\mathcal{R}'(u)| \leq C|u|^{s_0} \leq |t|^{s_0}$  donc :  $|f(t-h) - f(t)| \leq 2.C. \left| \frac{h}{t} \right| |t|^{s_0} \leq 2.C. \left| \frac{h}{t} \right|^{\sigma} |t|^{s_0}$ .  $\square$

**Lemme 3.3.** *Soient  $(s_0, \sigma_0) \in (0, 1) \times [0, 1)$ .*

*Si  $f \in K_{\sigma_0+1}^{s_0+1}$ , alors pour tout  $s \in (0, 1)$ ,  $f \in K_{\sigma_0}^s$ .*

*Preuve.*  $f(x) = f(x_0) + x\mathcal{R}(x)$  avec  $\mathcal{R} \in K_{\sigma_0}^{s_0}$  et  $\mathcal{R}(0) = 0$ .

$$f(t-h) - f(t) = t.(\mathcal{R}(t-h) - \mathcal{R}(t)) - h.(\mathcal{R}(t-h) - \mathcal{R}(0))$$

Or,  $\mathcal{R}(t-h) - \mathcal{R}(t) \leq C \left| \frac{h}{t} \right|^{\sigma_0}$ , donc

$$f(t-h) - f(t) \leq C.|t|. \left| \frac{h}{t} \right|^{\sigma_0} + C.|h|$$

Or,  $|h| \leq |t| \left| \frac{h}{t} \right|^{\sigma_0}$  donc  $|f(t-h) - f(t)| \leq 2C.|t|. \left| \frac{h}{t} \right|^{\sigma_0} \leq 2C.|t|^s. \left| \frac{h}{t} \right|^{\sigma_0}$ .

□

**Lemme 3.4.** Soient  $(s_0, \sigma_0) \in (0, 1) \times [0, 1)$ . Soient  $(S_0, L_0) \in \mathbb{N}^2$ . Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Si  $s + S \leq s_0 + S_0$ , alors  $K_{\sigma_0+S_0}^{s_0+S_0}(x_0) \subset K_{\sigma_0+S_0}^{s+S}(x_0)$

*Preuve.* On commence par définir deux transformations utiles.

Notons  $T$  l'application définie pour toute fonction  $f \in K_{\sigma_0}^{1+s_0}(x_0)$  où  $(s_0, \sigma_0)$  est dans  $(\mathbb{R}_+ - \mathbb{N}) \times \mathbb{R}_+$  par :

$$T(f)(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } T(f)(x_0) = f'(x_0).$$

D'après la proposition 3.12, pour tous  $(s, \sigma) \in (\mathbb{R}_+ - \mathbb{N}) \times \mathbb{R}_+$  et pour toute fonction  $f \in K_{\sigma_0}^{1+s_0}(x_0)$  :

$$f \in K_{\sigma}^{1+s}(x_0) \text{ équivaut à } T(f) \in K_{\sigma}^s(x_0). \quad (3.6)$$

Notons  $U$  l'application définie pour toute fonction  $f \in K_{1+\sigma_0}^{s_0}(x_0)$  où  $(s_0, \sigma_0)$  est dans  $(\mathbb{R}_+ - \mathbb{N}) \times \mathbb{R}_+$  par :

$$U(f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x} [(x - x_0).f(x)].$$

D'après les propositions 3.10 et 3.13, pour tous  $(s, \sigma) \in (\mathbb{R}_+ - \mathbb{N}) \times \mathbb{R}_+$  et pour toute fonction  $f \in K_{1+\sigma_0}^{s_0}(x_0)$  :

$$f \in K_{\sigma+1}^s(x_0) \text{ équivaut à } U(f) \in K_{\sigma}^s(x_0). \quad (3.7)$$

Supposons maintenant le contraire de l'énoncé du lemme. Alors il existe  $(s_1, s_2) \in (0, 1)^2$ ,  $(S_1, S_2) \in (0, 1)^2$  et  $g \in K_{\sigma_0+L_0}^{s_2+S_2}(x_0) - K_{\sigma_0+L_0}^{s_1+S_1}(x_0)$  avec  $s_1 + S_1 \leq$

$$s_2 + S_2 \leq s_1 + S_1 + 1 .$$

Posons  $h = T^{S_1} \circ U^{L_0}(g)$ . On déduit des équations (3.6) et (3.7) :  $h \in K_{\sigma_0}^{s_2+S_2-S_1}(x_0) - K_{\sigma_0}^{s_1}(x_0)$ . Or  $S_2 - S_1 \in \{0, 1\}$ . Si  $S_2 - S_1 = 0$ , alors  $h \in K_{\sigma_0}^{s_2}(x_0) - K_{\sigma_0}^{s_1}(x_0)$ , ce qui est en contradiction avec la proposition 3.8. Si  $S_2 - S_1 = 1$ , alors  $h \in K_{\sigma_0}^{s_2+1}(x_0) - K_{\sigma_0}^{s_1}(x_0)$ , ce qui est en contradiction avec le lemme 3.3. Dans tous les cas, on arrive à une contradiction.  $\square$

**Lemme 3.5.** Soient  $(s_0, \sigma_0) \in (0, 1) \times [0, 1)$ . Soient  $(S_0, L_0) \in \mathbb{N}^2$ .

Si  $\sigma + L \leq \sigma_0 + L_0$ , alors  $K_{\sigma_0+L_0}^{s_0+S_0} \subset K_{\sigma+S}^{s_0+S_0}$

*Preuve.* Supposons le contraire de l'énoncé.

Alors il existe  $(s_1, s_2) \in (0, 1)^2$ ,  $(S_1, S_2) \in \mathbb{N}^2$  et  $g \in K_{\sigma_2+L_2}^{s_0+S_0}(x_0) - K_{\sigma_1+L_1}^{s_0+S_0}(x_0)$  avec  $\sigma_1 + L_1 \leq \sigma_2 + L_2 \leq \sigma_1 + L_1 + 1$ .

Posons  $h = T^{S_0} \circ U^{L_1}(f)$ , où  $T$  et  $U$  sont définis comme dans la démonstration du lemme 3.4. D'après les équations (3.6) et (3.7) :  $h \in K_{\sigma_2+L_2-L_1}^{s_0}(x_0) - K_{\sigma_1}^{s_0}(x_0)$ . Or  $L_2 - L_1 \in \{0, 1\}$ . Si  $L_2 - L_1 = 0$ , alors  $h \in K_{\sigma_2}^{s_0}(x_0) - C_{\sigma_1}^{s_0}(x_0)$ , ce qui est en contradiction avec la proposition 3.8. Si  $L_2 - L_1 = 1$ , alors  $h \in K_{\sigma_0}^{s_2+1}(x_0) - K_{\sigma_0}^{s_1}(x_0)$ , ce qui est en contradiction avec le lemme 3.2. Dans tous les cas, on arrive à une contradiction.  $\square$

*Démonstration du théorème 3.3.* D'après le lemme 3.4,  $K_{\sigma_1}^{s_1}(x_0) \subset K_{\sigma_1}^{s_2}(x_0)$ . D'après le lemme 3.5,  $K_{\sigma_1}^{s_2}(x_0) \subset K_{\sigma_2}^{s_2}(x_0)$ . Donc  $K_{\sigma_1}^{s_1}(x_0) \subset K_{\sigma_2}^{s_2}(x_0)$ .  $\square$

On a de même :

**Théorème 3.4.** Soient  $(s_1, s_2) \in (\mathbb{R} - \mathbb{N})^2$  et  $(\sigma_1, \sigma_2) \in \mathbb{R}^2$ .

Si  $f \in K_{\sigma_1}^{s_1}(x_0) \cap K_{\sigma_2}^{s_1}(x_0)$  alors, pour tout  $\lambda \in [0, 1]$  tel que  $\lambda.s_1 + (1-\lambda).s_2 \notin \mathbb{N}$  :

$$f \in K_{\lambda.\sigma_1 + (1-\lambda).\sigma_2}^{\lambda.s_1 + (1-\lambda).s_2}(x_0)$$

Etant donné une fonction  $f$ , on voit que les théorèmes 3.3 et 3.4 imposent les mêmes contraintes à l'ensemble des couples  $(s, \sigma) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \mathbb{N})$  tels que  $f \in K_{\sigma}^s(x_0)$  que celles vues dans la section 2.2.1.

On peut voir figure 3.5 l'allure d'un tel ensemble dans le plan  $(s, \sigma)$ . D'après le théorème 3.4, cet ensemble est convexe. De plus, d'après le théorème 3.3 : pour tout  $s$  fixé, l'ensemble des  $\sigma$  tels que  $f \in K_{\sigma}^s(x_0)$  est de la forme  $[0, \sigma_s]$  ou  $[0, \sigma_s]$



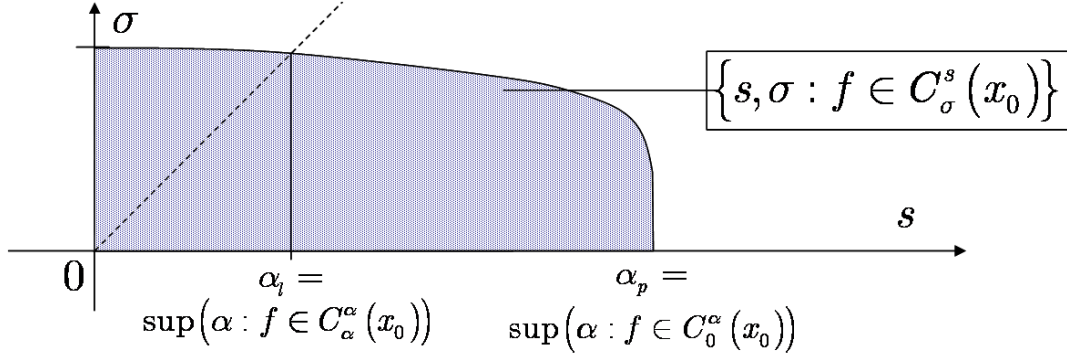


FIG. 3.5 – Allure d'un ensemble de couples  $(s, \sigma)$  tels que  $f \in K_\sigma^s(x_0)$

et pour tout  $\sigma$  fixé, l'ensemble de  $s$  tels que  $f \in K_\sigma^s(x_0)$  est de la forme  $[0, s_\sigma)$  ou  $[0, s_\sigma]$ .

Cet ensemble, de forme régulière, peut être décrit par sa frontière, comme on l'a vu au chapitre 2. Rappelons que pour décrire la frontière comme le graphe d'une fonction, il est nécessaire d'utiliser les variables  $(\sigma, s')$  où  $\sigma = s + s'$ . La frontière 2-microlocale d'une fonction  $f$  en  $x_0$  est donc la fonction définie par

$$\sigma(s') = \sup\{\sigma : f \in C^{\sigma-s', s'}(x_0)\} = \sup\{\sigma : f \in K_\sigma^{\sigma-s'}(x_0)\}. \quad (3.8)$$

La caractérisation temporelle des espaces 2-microlocaux (théorème 3.2) est limitée aux espaces 2-microlocaux  $C^{s, \sigma-s}(x_0)$  pour  $s > 0$  et  $\sigma > 0$ . Ceci correspond aux couples  $(s', \sigma)$  vérifiant  $\sigma > \max(0, s')$  (région en gris clair de la figure 3.6). Cette restriction est due au fait que la définition de  $K_\sigma^s(x_0)$  s'appuie sur les valeurs ponctuelles de la fonction, qui doivent donc être bien définies. Elle pourrait néanmoins se généraliser aux distributions tempérées, en considérant une “primitive” de la distribution d'ordre suffisamment grand pour être dans ces espaces.

On a également représenté sur cette figure en bleu clair (ou gris foncé sur une impression en noir et blanc) les espaces de paramètres  $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$  caractérisables directement par la proposition 3.7, c'est à dire par les accroissements de la fonction  $f(x_0 + t - h) - f(x_0)$ , les autres espaces caractérisés en temps nécessitant de considérer accroissements des “restes”  $\mathcal{R}^{(L)}$  de la définition 3.9.

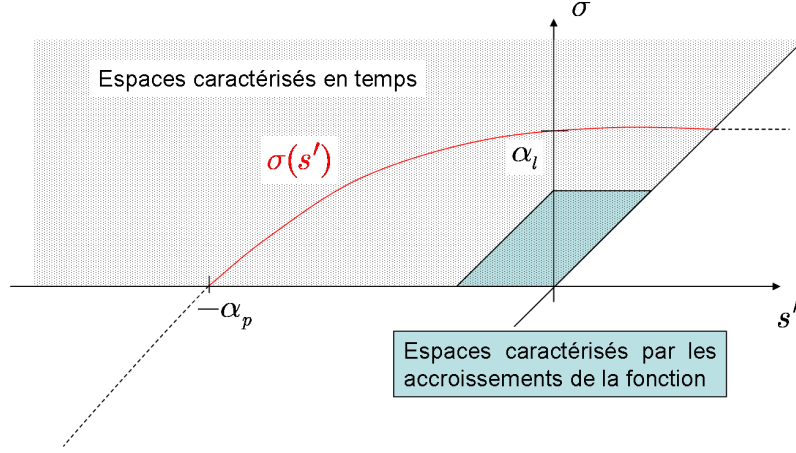


FIG. 3.6 – Espaces 2-microlocaux caractérisables en temps représentés dans le plan  $(s', \sigma)$

### 3.2.5 Frontières 2-microlocales partielles

On a vu que l'appartenance aux espaces 2-microlocaux pour  $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$  peut être caractérisée directement au moyen des valeurs de la fonction (voir la proposition 3.7 et le théorème 3.1).

On peut réécrire cette caractérisation sous la forme suivante :

**Proposition 3.14.** *Pour tout  $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$ , en posant  $s' = \sigma - s$  :*

*$\sigma < \sigma(s')$  équivaut à :  $\sigma < \sigma_{0,0}(s')$  , où*

$$\sigma_{0,0}(s') = \liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log |f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)| + s' \log |t|}{\log |h|}; \frac{t}{h} \geq 1 \right\}$$

*Preuve.* Si  $\sigma < \sigma(s')$  : considérons  $\sigma_1 > \sigma$  tel que  $f \in K_{\sigma_1}^s(x_0)$ . Il existe  $\epsilon > 0$  et  $K \in \mathbb{R}$  tels que, pour tous  $t$  et  $h$  de même signe avec  $0 < |h| \leq |t| < \epsilon$  :

$$|f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)| \leq C|h|^{\sigma_1}|t|^{-s'}.$$

En multipliant par  $|t|^{s'}$ , en passant au logarithme puis en divisant par  $\log |h|$  :

$$\sigma_1 \leq \frac{\log |f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)| + s' \log |t|}{\log |h|} - \frac{C}{\log |h|}$$

En prenant la liminf quand  $(t, h)$  tend vers 0, il vient  $\sigma_1 \leq \sigma_{0,0}(s')$ , puis  $\sigma <$

$\sigma_{0,0}(s')$ .

Si  $\sigma < \sigma_{0,0}(s')$  : considérons  $\sigma_1 \in (\sigma, \sigma_{0,0}(s'))$ . Alors il existe  $\epsilon > 0$  tel que, pour tous  $t$  et  $h$  de même signe avec  $0 < |h| \leq |t| < \epsilon$  :

$$\frac{\log |f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)| + s' \log |t|}{\log |h|} \geq \sigma_1.$$

Il vient :  $|f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)| \leq |h|^{\sigma_1} |t|^{-s'}$ , donc  $f \in K_{\sigma_1}^s(x_0)$ . On conclut  $\sigma_1 \leq \sigma_{0,0}(s')$ , donc  $\sigma < \sigma(s')$ .  $\square$

En supposant que l'on puisse calculer la fonction  $\sigma_{0,0}$ , on peut en déduire l'intersection du graphe de la frontière 2-microlocale  $\sigma(s')$  avec l'ensemble des couples  $\{(\sigma - s, \sigma) : (s, \sigma) \in (0, 1)^2\}$ . Si la frontière ne traverse pas ce domaine, on sait du moins si elle passe au-dessus ou en dessous de celui-ci.

Cette proposition se généralise immédiatement au cas  $(s, \sigma) \in (\mathbb{R}_+ - \mathbb{N})^2$ . Il suffit de remplacer les différences  $|f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)|$  de la proposition 3.7 par les différences  $|\mathcal{R}^{(L)}(x_0 + t - h) - \mathcal{R}^{(L)}(x_0 + t)|$  de la définition 3.9. On définit donc la frontière 2-microlocale partielle  $\sigma_{L,S}$  à partir de ces différences.

**Définition 3.10.** Soit  $f$  une fonction et  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Pour tous  $(S, L) \in \mathbb{N}^2$  :

- Si  $f$  est continue en  $x_0$  et il existe un polynôme  $P$  et une fonction  $\mathcal{R}$  telles que, pour tout  $x \neq 0$  :  $f(x_0 + x) = P(x) + x^{S-L}\mathcal{R}(x)$  où  $\mathcal{R}$  est de plus  $L$  fois dérivable sur un voisinage de 0 : on pose

$$\Delta_{L,S}(t, h) = |\mathcal{R}^{(L)}(t - h) - \mathcal{R}^{(L)}(t)|.$$

- Sinon, pour tout couple  $(t, h)$  :

$$\Delta_{L,S}(t, h) = +\infty.$$

La frontière 2-microlocale partielle de  $f$  en  $x_0$   $\sigma_{L,S}$  est définie par : pour tout  $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$ , en posant  $s' = \sigma - s$  :

$$\sigma_{L,S}(s') = \liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log \Delta_{L,S}(t, h) + s' \log |t|}{\log |h|}; \frac{t}{h} \geq 1 \right\} \quad (3.9)$$

**Proposition 3.15.** Soit  $f$  une fonction, soit  $x_0 \in \mathbb{R}$ , soit  $(S, L) \in \mathbb{N}^2$ , soit  $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$ . On pose  $s' = \sigma - s$ . Soit  $\sigma_{L,S}$  la frontière 2-microlocale partielle

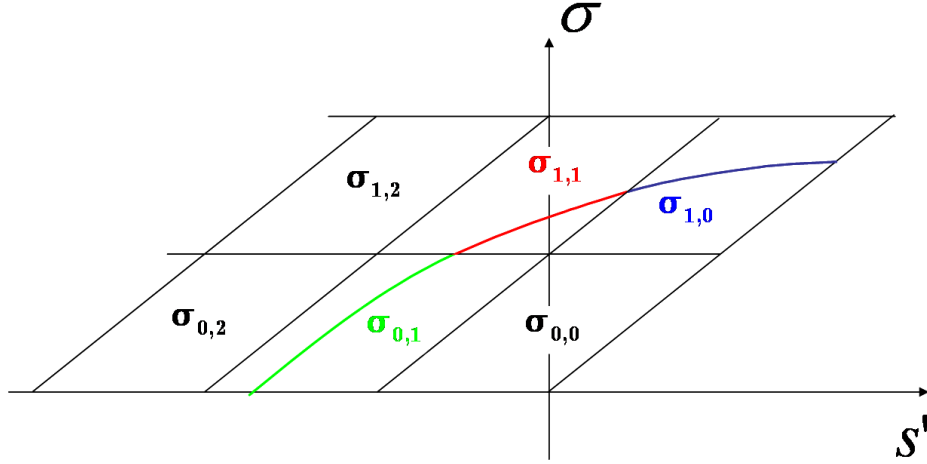


FIG. 3.7 – Découpage du plan  $(s', \sigma)$  suivant les  $\sigma_{L,S}$ .

de  $f$  en  $x_0$ .

$$\sigma + L < \sigma(s' + L - S) \text{ équivaut à : } \sigma < \sigma_{L,S}(s')$$

**Remarque 3.7.** On peut s'assurer de l'unicité de  $P$ , donc de  $\Delta_{L,S}$  en imposant ou bien  $\deg P \leq S - L$  et  $\mathcal{R}(0) = 0$  ou bien  $\deg P \leq S$  et  $\mathcal{R}(0) = \mathcal{R}'(0) = \dots = \mathcal{R}^{(L)}(0) = 0$ .

La proposition 3.15 est l'équivalent en ce qui concerne la frontière 2-microlocale des propositions 3.3 et 3.6 à propos des exposants de Hölder. On voit ainsi qu'on peut calculer la frontière 2-microlocale partielle  $\sigma_{L,S}$  à l'aide d'une  $\liminf$  et des différences  $\Delta_{L,S}$  obtenues par dérivations ou divisions par  $(x - x_0)$  de la fonction.

Chacun des tronçons de  $\sigma$  va donc correspondre à une des frontières  $\sigma_{L,S}$  : voir figure 3.7. Ceci conduit à la définition suivante, que nous utiliserons lors du calcul numérique ou littéral de frontières :

**Définition 3.11.**

$$T_{L,S} = \{(\sigma + L - (s + S), \sigma + L) : (s, \sigma) \in (0, 1)^2\}$$

En supposant qu'on connaît un moyen de calculer les fonctions  $\sigma_{L,S}$ , il est donc possible d'avoir un algorithme pour calculer  $\sigma$ . Par exemple, l'algorithme 3, est un des algorithmes possibles pour calculer la valeur  $\sigma_f(s')$  en un point  $s'$

fixé. Pour simplifier, on choisit  $x_0 = 0$  et on suppose que l'on cherche la valeur  $\sigma(s' + S')$  avec  $s' \in (0, 1)$ ,  $S'$  entier négatif fixé. On a supposé également que  $\sigma(s' + S') \geq 0$ . Les algorithmes à utiliser dans les autres cas sont analogues.

---

**Algorithme 3** Calcul de  $\sigma(s' + S')$  en supposant  $x_0 = 0$ ,  $S' \leq 0$  et  $\sigma(s' + S') \geq 0$ .

---

```

 $f \leftarrow f - f(0)$ 
pour  $i$  de 1 à  $-S'$  faire
  pour tout  $x \neq 0$  faire
     $f(x) \leftarrow \frac{1}{x} \int_0^x f(x)$ 
  fin pour
   $f(0) \leftarrow 0$ 
fin pour
 $m \leftarrow 0$ 
 $v \leftarrow \liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log |f(t+h) - f(t)| + s' \log |t|}{\log |h|}; t/h \geq 1 \right\}$ 
tant que  $v \geq 1$  faire
   $m \leftarrow m + 1$ 
  si  $f$  est dérivable sur un voisinage  $V$  de 0 alors
    pour tout  $x \in V$  faire
       $g(x) \leftarrow f'(x)$ 
    fin pour
     $f \leftarrow g$ 
     $v \leftarrow \liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log |f(t+h) - f(t)| + s' \log |t|}{\log |h|}; t/h \geq 1 \right\}$ 
  sinon
     $v \leftarrow 0$ 
  fin si
fin tant que
 $\sigma(s' + S') \leftarrow m + v + S'$ 

```

---

Si on cherche à calculer la frontière en entier, il est bien sûr plus intéressant de suivre la courbe  $\sigma$  en dérivant ou en divisant par  $(x - x_0)$  suivant les cas.

### 3.3 Le spectre 2-microlocal temporel

Le spectre 2-microlocal a été initialement introduit dans [GL98, LS04] à partir de la caractérisation des espaces 2-microlocaux en ondelettes. Nous proposons ici un spectre 2-microlocal en temps, qui permet de retrouver la frontière 2-microlocale sans passer par une décomposition en ondelettes.

On a vu qu'il est possible de calculer de manière systématique la frontière 2-microlocale  $\sigma$  à partir du moment où on est capable de calculer les  $\sigma_{L,S}$ . Le spectre 2-microlocal temporel peut être vu comme un moyen de calculer ces grandeurs.

On rappelle l'expression de  $\sigma_{L,S}$  :

$$\sigma_{L,S}(s') = \liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log \Delta_{L,S}(t,h)}{\log |h|} + s' \frac{\log |t|}{\log |h|}; \frac{t}{h} \geq 1 \right\}.$$

On peut chercher à évaluer directement la  $\liminf$  pour toutes les valeurs de  $s'$  dans  $(-1, 1)$  (voir [KL02]). Lorsqu'on veut obtenir la frontière en entier, cette approche a l'inconvénient d'une certaine redondance, puisque, pour chaque point  $s'$  auquel on calcule la valeur  $\sigma_{L,S}(s')$ , il est nécessaire d'accéder aux valeurs de  $\Delta_{L,S}(t,h)$  pour tous les couples  $(t,h)$ . De plus, le calcul d'une  $\liminf$  sur l'ensemble des  $(t,h)$  peut apparaître comme difficile. Enfin, rien ne garantit *a priori* que la fonction obtenue  $\sigma_{L,S}(s')$  est bien convexe et de pente comprise entre 0 et 1.

L'expression à l'intérieur de la  $\liminf$  est la somme de deux termes dont un seul dépend effectivement de la fonction considérée : l'idée du formalisme 2-microlocal est de découper l'ensemble des  $(t,h)$  tels que  $t/h \geq 1$  suivant la valeur de  $\frac{\log |t|}{\log |h|}$ , puis d'évaluer  $\liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \frac{\log \Delta_{L,S}(t,h)}{\log |h|}$  sur les sous ensembles considérés. Ainsi, on n'a besoin d'accéder qu'une fois aux valeurs  $\Delta(t,h)$  et les  $\liminf$  calculées le sont sur des ensembles plus petits. De plus, ceci permet de retrouver  $\sigma_{L,S}$  en garantissant la convexité et l'encadrement de la pente du résultat obtenu numériquement.

### 3.3.1 Définition

On commence par définir des ensembles  $D(\rho, \epsilon)$  où  $\log |t| / \log |h|$  est dans  $[\rho - \epsilon, \rho + \epsilon]$  :

**Définition 3.12.** *Pour tout  $\rho \in [0, 1]$ , pour tout  $\epsilon > 0$  :*

$$D(\rho, \epsilon) = \left\{ (t, h) \in ((-1, 0) \cup (0, 1))^2 : \frac{t}{h} \geq 1 \text{ et } |h|^{\rho+\epsilon} \leq |t| \leq |h|^{\rho-\epsilon} \right\}$$

Une manière moins concise mais plus explicite de décrire les ensembles  $D(\rho, \epsilon)$  est de distinguer les cas  $\rho \in (0, 1)$ ,  $\rho = 0$  et  $\rho = 1$  (voir figure 3.8). Dans les trois

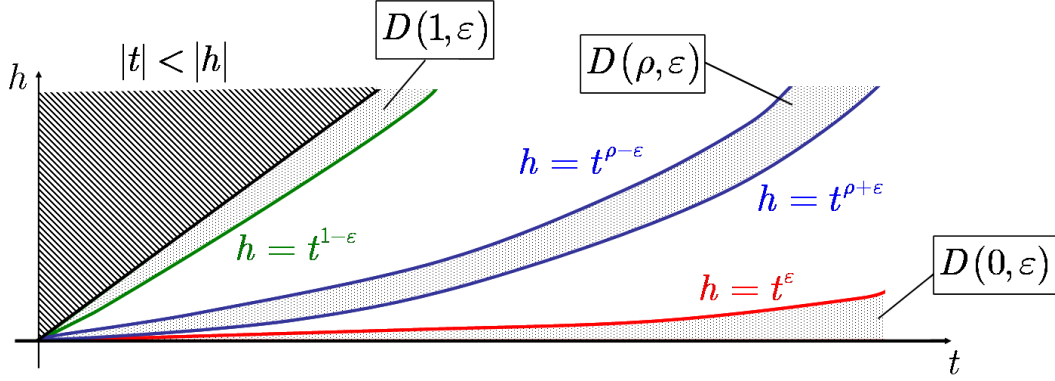


FIG. 3.8 – Domaines  $D(\rho, \epsilon)$ .

cas, pour  $\epsilon$  assez petit :

- Si  $\rho \in (0, 1)$  :  $(t, h) \in D(\rho, \epsilon) \iff |h|^{\rho+\epsilon} \leq |t| \leq |h|^{\rho-\epsilon}$ .
- Si  $\rho = 0$  :  $(t, h) \in D(\rho, \epsilon) \iff |h|^{\rho+\epsilon} \leq |t|$ .
- Si  $\rho = 1$  :  $(t, h) \in D(\rho, \epsilon) \iff |h| \leq |t| \leq |h|^{\rho-\epsilon}$ .

**Définition 3.13.** Etant donnés une fonction  $f$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ , et  $(L, S) \in \mathbb{N}^2$ , on définit les  $\chi_{L,S}(\rho)$  pour  $\rho \in [0, 1]$  par :

$$\chi_{L,S}^\epsilon(\rho) = \liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log \Delta_{L,S}(t, h)}{\log |h|} : (t, h) \in D(\rho, \epsilon) \right\}.$$

Puis :

$$\chi_{L,S}(\rho) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \chi_{L,S}^\epsilon(\rho).$$

**Remarque 3.8.** Dans le cas  $L = S = 0$  on a simplement :

$$\chi_{L,S}^\epsilon(\rho) = \liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log |f(x_0 + t - h) - f(x_0 + t)|}{\log |h|} : (t, h) \in D(\rho, \epsilon) \right\}.$$

**Remarque 3.9.** Si  $[\rho_1 - \epsilon_1, \rho_1 + \epsilon_1] \subset [\rho_2 - \epsilon_2, \rho_2 + \epsilon_2]$  alors  $\chi_{L,S}^{\epsilon_2}(\rho_2) \leq \chi_{L,S}^{\epsilon_1}(\rho_1)$

La remarque 3.9 montre que  $\epsilon \rightarrow \chi_{L,S}^\epsilon(\rho)$  est croissante, donc converge dans  $\overline{\mathbb{R}}$  quand  $\epsilon \rightarrow 0^+$ . On en déduit que  $\chi_{L,S}(\rho)$  est bien défini.

De manière euristique, en reprenant la fonction  $\mathcal{R}$  de la définition 3.10, on peut considérer que la valeur de  $\chi_{L,S}(\rho)$  pour  $\rho \in (0, 1)$  est "dictée" par les différences importantes  $|\mathcal{R}^{(L)}(t) - \mathcal{R}^{(L)}(t \pm |t|^{1/\rho})|$  quand  $t$  tend vers 0.

Pour  $\rho = 1$ , on peut dire que ce sont les différences  $|\mathcal{R}^{(L)}(t) - \mathcal{R}^{(L)}(t - h)|$  avec  $h \simeq t$  qui déterminent  $\chi(\rho)$ .

Pour  $\rho = 0$ , ce sont uniquement les différences  $\Delta_{L,S}(t_n, h_n)$ , où  $h_n$  est "très petit" devant  $t_n$  qui sont pertinentes.

### 3.3.2 Propriétés

La remarque 3.9 peut également nous permettre de préciser la manière dont  $\chi_{L,S}^\epsilon$  converge vers  $\chi_{L,S}$ .

**Proposition 3.16.** *Pour tout  $\rho_0 \in [0, 1]$ , pour tout  $\epsilon > 0$  :*

$$\min_{[\rho_0 - \epsilon, \rho_0 + \epsilon]} \chi_{L,S}(\rho) \leq \chi_{L,S}^\epsilon(\rho_0) \leq \inf_{(\rho_0 - \epsilon, \rho_0 + \epsilon)} \chi_{L,S}(\rho).$$

*De plus,  $\chi_{L,S}$  est semi-continue inférieurement.*

*Preuve.* Si  $\rho \in (\rho_0 - \epsilon, \rho_0 + \epsilon)$  alors, pour tout  $\eta$  tel que  $[\rho - \eta, \rho + \eta] \subset [\rho_0 - \epsilon, \rho_0 + \epsilon]$  :

$$\chi_{L,S}^\epsilon(\rho_0) \leq \chi_{L,S}^\eta(\rho).$$

On obtient l'inégalité de droite en faisant tendre  $\eta$  vers 0.

En faisant maintenant tendre  $\epsilon$  vers 0 dans cette inégalité, on obtient la semi-continuité de  $\chi_{L,S}$ .

Enfin, si  $(t_n, h_n)$  est une suite de  $D(\rho_0, \epsilon)$  telle que  $\frac{\log \Delta(t_n, h_n)}{\log |h_n|}$  tend vers  $\chi_{L,S}^\epsilon(\rho)$ , alors on peut en extraire une suite  $(t'_n, h'_n)$  telle que  $\frac{\log |t'_n|}{\log |h'_n|}$  tend vers  $\rho_{min} \in [\rho_0 - \epsilon, \rho_0 + \epsilon]$ .

On vérifie que  $\chi_{L,S}(\rho_{min}) \leq \chi_{L,S}^\epsilon(\rho)$ , d'où l'inégalité de gauche (la borne inférieure est atteinte car  $\chi_{L,S}$  est semi-continue inférieurement).  $\square$

Les propositions 3.17 et 3.18 sont une formulation plus précise du fait euristique que  $\chi_{L,S}(\rho)$  est déterminé par les accroissements  $\Delta_{L,S}(t, h)$  "près de la courbe"  $t = h^\rho$ .

**Proposition 3.17.** *Soit  $f$  une fonction,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $(L, S) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\chi_{L,S}$  son spectre 2-microlocal temporel en  $x_0$  et  $\Delta_{L,S}$  ses accroissements définis comme précédemment.*



Supposons qu'il existe une fonction  $u$  semi-continue inférieurement et deux constantes  $C > 0$  et  $\delta > 0$  telles que, pour tout  $\rho \in [0, 1]$  et pour  $\delta > h > 0$  :

$$|\Delta_{L,S}(h^\rho, h)| \leq C \cdot |h|^{u(\rho)}$$

et

$$|\Delta_{L,S}(-h^\rho, -h)| \leq C \cdot |h|^{u(\rho)}$$

Alors  $\chi_{L,S}(\rho) \geq u(\rho)$ .

**Proposition 3.18.** Soit  $f$  une fonction,  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $(L, S) \in \mathbb{N}^2$ ,  $\chi_{L,S}$  son spectre 2-microlocal temporel en  $x_0$  et  $\Delta_{L,S}$  ses accroissements définis comme précédemment.

Supposons qu'il existe une fonction  $u$  et deux constantes  $C > 0$  et  $\delta > 0$  telles que, pour tout  $\rho \in [0, 1]$  et pour  $\delta > h > 0$  :

$$|\Delta_{L,S}(h_n^\rho, h_n)| \geq C \cdot |h_n|^{u(\rho)}$$

ou

$$|\Delta_{L,S}(-h_n^\rho, -h_n)| \geq C \cdot |h_n|^{u(\rho)}$$

Alors  $\chi_{L,S}(\rho) \leq u(\rho)$

La proposition 3.18 est évidente.

*Preuve de la proposition 3.17.* Soit  $\rho \in [0, 1]$ .

Pour tout  $\epsilon > 0$  et pour tout  $(t, h) \in D(\rho, \epsilon)$  avec  $\delta > |h| > 0$  : posons  $t = \text{sign}(h) \cdot |h|^r$  avec  $r \in [\rho - \epsilon, \rho + \epsilon]$ .

Par hypothèse :

$$\Delta_{L,S}(t, h) \leq C \cdot |h|^{u(r)} \leq C \cdot |h|^{\min\{u(r) : r \in [\rho - \epsilon, \rho + \epsilon]\}}.$$

En prenant le logarithme, en divisant par  $\log |h|$  et en prenant la  $\liminf$  quand  $(t, h)$  tend vers 0 dans  $D(\rho, \epsilon)$ , on obtient  $\chi_{L,S}(\rho, \epsilon) \geq \min\{u(r) : r \in [\rho - \epsilon, \rho + \epsilon]\}$ .  $u$  étant semi-continue inférieurement, le resultat s'ensuit en laissant  $\epsilon$  tendre vers 0.  $\square$

**Remarque** Si on pose :

$$\xi(\rho) = \sup\{\gamma : \exists C_{\rho,\gamma} > 0 \exists h_0 > 0 : \forall h \leq t_0 : |\Delta_{L,S}(h^\rho, h)| \leq C_{\rho,\gamma} h^\gamma\}$$

on pourrait être tenté de croire que les propositions 3.17 et 3.18 impliquent  $\xi(\rho) = \chi(\rho)$ . La proposition 3.17 permet bien d'avoir  $\chi(\rho) \leq \xi(\rho)$ . Cependant, pour pouvoir appliquer la proposition 3.18, il faut que  $\xi$  soit semi-continue inférieurement et les constantes  $C_{\rho,\gamma}$  uniformément bornées. Ceci n'est pas vrai en général, voir [LS04] pour des contre-exemples dans cadre du formalisme 2-microlocal en ondelettes.

### 3.3.3 Formalisme 2-microlocal temporel

Le résultat principal de cette partie est le suivant :

**Théorème 3.5.** *La frontière 2-microlocale partielle  $\sigma_{L,S}$  est la transformée de Legendre de  $-\chi_{L,S}$  :*

$$\sigma_{L,S}(s') = \min_{\rho \in [0,1]} (\rho s' + \chi_{L,S}(\rho)).$$

En pratique, à partir de la connaissance de  $\chi_{L,S}$  on peut facilement retrouver  $\sigma_{L,S}$ , ce qui nous donne accès à l'intersection de la courbe  $(\sigma(s'), s')$  avec l'ensemble  $T_{L,S}$ .

Pour aboutir au théorème 3.5, on passe par un résultat préliminaire.

**Lemme 3.6.** *Pour tout  $s' \in \mathbb{R}$ , pour tout  $\rho \in [0, 1]$ ,  $\epsilon > 0$  et  $(t, h) \in D(\rho, \epsilon)$  :*

$$\begin{aligned} \chi_{L,S}^\epsilon(\rho) + \rho s' - \epsilon |s'| &\leq \liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log(|t|^{s'} \Delta(t, h))}{\log |h|} : (t, h) \in D(\rho, \epsilon) \right\} \\ &\leq \chi_{L,S}^\epsilon(\rho) + \rho s' + \epsilon |s'|. \end{aligned}$$

*Preuve.* Pour tout  $(t, h) \in D(\rho, \epsilon)$  :  $\rho - \epsilon \leq \frac{\log |t|}{\log |h|} \leq \rho + \epsilon$ . D'où :

$$\rho s' - \epsilon |s'| \leq s' \frac{\log |t|}{\log |h|} \leq \rho s' + \epsilon |s'|$$

et le résultat vient en ajoutant  $\frac{\log \Delta(t, h)}{\log |h|}$  et en prenant la  $\liminf$ .  $\square$

*Preuve du théorème 3.5.* Le terme de droite est bien un min car  $\chi_{L,S}$  est semi-continue inférieurement. Soit  $s' \in \mathbb{R}$ . L'inégalité droite du lemme 3.6 permet d'écrire :

$$\sigma_{L,S}(s') \leq \rho s' + \chi_{L,S}^\epsilon(\rho) + \epsilon |s'|.$$

En faisant tendre  $\epsilon$  vers 0 puis en prenant la borne inférieure pour  $\rho \in [0, 1]$ , on obtient :  $\sigma_{L,S}(s') \leq \min_{\rho \in [0,1]} (\chi_{L,S}(\rho) + \rho s')$ .

La démonstration de l'inégalité inverse est un peu plus délicate. Fixons  $\eta > 0$ .

Pour tout  $\rho \in [0, 1]$ , il existe  $\epsilon_\rho \in (0, \eta)$  tel que  $\chi_{L,S}(\rho) \leq \chi_{L,S}^{\epsilon_\rho}(\rho) + \eta$ .

Soient  $(\rho_1 \dots \rho_N)$  tels que  $[0, 1] \subset \cup_{i=1..N} (\rho_i - \epsilon_{\rho_i}, \rho_i + \epsilon_{\rho_i})$ .

On en déduit, en notant  $\epsilon_{\rho_i} = \epsilon_i$  :

$$\cup_{i=1..N} D(\rho_i, \epsilon_i) = \left\{ (t, h) \in ((-1, 0) \cup (0, 1))^2 : \frac{t}{h} \geq 1 \right\}.$$

Donc :

$$\sigma_{L,S}(s') = \min_{i=1..N} \liminf_{(t,h) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log(|t|^{s'} \Delta(t, h))}{\log |h|} : (t, h) \in D(\rho_i, \epsilon_i) \right\}.$$

Grâce au lemme 3.6, on en déduit :  $\sigma_{L,S}(s') \geq \min_{i=1..N} (\chi_{L,S}^\epsilon(\rho_i) + \rho_i s' - \epsilon_i |s'|)$ .

Par définition des  $\epsilon_i$  et  $\rho_i$ , il vient :

$$\sigma_{L,S}(s') \geq \min_{i=1..N} (\chi_{L,S}(\rho_i) + \rho_i s') - (1 + |s'|)\eta.$$

Ceci implique :  $\sigma_{L,S}(s') \geq \min_{\rho \in [0,1]} (\chi(\rho) + \rho s') - (1 + |s'|)\eta$ . Ceci étant vrai pour tout  $\eta$  positif, le résultat est démontré.  $\square$

### 3.3.4 Quelques exemples de spectres 2-microlocaux

En application, nous montrons que le spectre 2-microlocal en temps permet de calculer simplement la frontière 2-microlocale de fonctions usuelles telles que la fonction “cusp”, la fonction “chirp” ou la fonction de Weierstrass.

Nous commençons par démontrer des propositions qui permettent souvent d'obtenir les spectres et/ou les frontières sans calcul.

**Proposition 3.19.** *Pour tout  $\alpha > 0$ , pour tout  $\rho \in [0, 1]$ , il existe  $C_1, C_2 > 0$*

tels que pour tout  $h \in (0, 1]$

$$C_1.h^{1+\rho(\alpha-1)} \leq |h^{\rho\alpha} - (h^\rho - h)^\alpha| \leq C_2.h^{1+\rho(\alpha-1)} \quad (3.10)$$

*Preuve.* Etant donné un  $\alpha$  fixé dans  $\mathbb{R}^*$ , la fonction continue  $z \rightarrow \frac{1-(1-z)^\alpha}{z^\alpha}$  de  $(0, 1]$  dans  $\mathbb{R}^*$  tend vers  $\alpha$  en 0. Il existe donc deux constantes strictement positives  $C_1$  et  $C_2$  telles que, pour tout  $z$  dans  $(0, 1]$ ,  $C_1.z^\alpha \leq |1 - (1 - z)^\alpha| \leq C_2.z^\alpha$ . Le résultat vient en appliquant cette inégalité à  $z = h^{1-\rho}$  et en multipliant par  $h^{\rho\alpha}$ .  $\square$

**Proposition 3.20.** *Soit  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction telle que  $\alpha_l(f, x_0) \in (0, 1)$*

*Soit  $\chi_{0,0}$  le spectre 2-microlocal en temps de  $f$  en  $x_0$ .*

*Alors pour tout  $\rho \in [0, 1]$  :*

$$\chi_{0,0}(\rho) \geq \alpha_l(f, x_0)$$

*Preuve.* Pour tout  $\beta < \alpha_l(f, x_0)$ , on sait que  $f \in D^\gamma(x_0)$  avec  $\gamma > \beta$  donc il existe  $\epsilon > 0$  tel que, pour tout  $t \in (0, \epsilon)$  :

$$\begin{cases} |f(x_0 + t - t^\rho) - f(x_0 + t)| & \leq |t|^{\rho\beta} \\ |f(x_0 - t + t^\rho) - f(x_0 - t)| & \leq |t|^{\rho\beta} \end{cases}$$

Il suffit ensuite d'appliquer la proposition 3.18 avec  $u(\rho) = \beta$ .  $\square$

Remarquons que la proposition 3.20 peut aussi être obtenue avec le raisonnement suivant : d'après la proposition 2.5 on sait que  $\alpha_l(f, x_0) = \sigma(0)$ . Comme  $\alpha_l(f, x_0) \in (0, 1)$ ,  $\alpha_l(f, x_0) = \sigma_{0,0}(0) = \min_{\rho \in [0, 1]} \chi_{0,0}(\rho)$  d'après le théorème 3.5.

**Proposition 3.21.** *Soit  $(a, b)$  un intervalle ouvert.*

*Soit  $\alpha \in (0, 1)$  et  $f$  une fonction telle que, pour tout  $x \in (a, b)$  :*

$$\alpha_p(f, x) \leq \alpha \quad (3.11)$$

*Soit  $\chi_{0,0}$  le spectre 2-microlocal en temps de  $f$  en  $x_0 \in (a, b)$ .*

*Alors :*

$$\begin{cases} \chi_{0,0}(0) & \leq \alpha \\ \chi_{0,0}(1) & \leq \alpha \end{cases}$$

*Preuve.* Pour tout  $\beta > \alpha$ ,  $f \notin C^\beta(x_0)$  donc il existe une suite  $(t_n)_n$  telle que :

$$|f(x_0 + t_n) - f(x_0)| \geq |t_n|^\beta.$$

On peut choisir les  $(t_n)$  de même signe et appliquer la proposition 3.17 :  $\chi(1) \leq \beta$ . Ceci étant vrai pour tout  $\beta > \alpha$ ,  $\chi(1) \leq \alpha$ .

Soit  $t_n$  une suite strictement positive qui tend vers 0 (par exemple  $t_n = 1/n$ ). Pour tout  $\beta < \alpha$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $x_0 + t_n \in (a, b)$ ,  $f \notin C^\beta(x_0 + t_n)$  donc il existe une suite  $(h'_m)_m$  qui tend vers 0 telle que :

$$|f(x_0 + t_n - h'_m) - f(x_0 + t_n)| \geq |h'_m|^\beta.$$

Pour tout  $n$ , la suite  $h'_m$  tend vers 0 donc on peut considérer un élément  $h_n$  de cette suite tel que  $|h_n| \leq (t_n)^n$ . La suite  $(t_n, h_n)$  vérifie finalement :

$$|h_n| \leq (t_n)^n \quad (3.12)$$

$$|f(x_0 + t_n - h_n) - f(x_0 + t_n)| \geq |h_n|^\beta \quad (3.13)$$

Quitte à intervertir  $t_n$  et  $t_n - h_n$ , on peut supposer de plus  $h_n$  positif, ce qui permet d'avoir  $t_n$  et  $h_n$  de même signe. Ceci associé à 3.12 nous permet d'affirmer que, pour tout  $\epsilon > 0$ , la suite  $(t_n, h_n)_n$  est dans  $D(0, \epsilon)$  pour  $n$  assez grand. On en déduit par (3.13) :  $\chi_{0,0}^\epsilon(0) \leq \beta$ . Ainsi,  $\chi_{0,0}(0) \leq \beta$  pour tout  $\beta > \alpha$ . □

Ces deux propositions ont une conséquence immédiate :

**Proposition 3.22.** *Soit  $(a, b)$  un intervalle ouvert.*

*Soit  $f$  une fonction telle que, pour tout  $x \in (a, b)$  :*

$$\alpha_p(f, x) = \alpha_l(f, x) = \alpha(x) \quad (3.14)$$

*où  $\alpha$  est une fonction continue de  $(a, b)$  dans  $(0, 1)$ .*

*Alors, pour tout  $x_0 \in (a, b)$ , le spectre 2-microlocal  $\chi_{0,0}$  de  $f$  en  $x_0$  vérifie :*

$$\chi_{0,0}(0) = \chi_{0,0}(1) = \min_{\rho \in [0,1]} \chi(\rho) = \alpha(x_0) \quad (3.15)$$

*De plus, la frontière 2-microlocale partielle de  $f$  en  $x_0$  est :*

$$\sigma_{0,0}(s') = \min(\alpha(x_0), \alpha(x_0) + s') \quad (3.16)$$

*Preuve.* D'après la proposition 3.20, pour tout  $\rho \in [0, 1]$ ,  $\chi_{0,0}(\rho) \geq \alpha(x_0)$ .

Pour tout  $\epsilon > 0$ , d'après la proposition 3.21,  $\chi_{0,0}(0) \leq \sup_{t \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)} \alpha(t)$ . En faisant tendre  $\epsilon$  vers 0 et par continuité de  $\alpha$ , il vient :  $\chi_{0,0}(0) \leq \alpha(x_0)$ . Le même raisonnement est faisable avec  $\chi_{0,0}(1)$ . On a donc obtenu les égalités (3.15).

L'égalité (3.16) vient ensuite naturellement du théorème 3.5.

□

**Remarque** Dans cette démonstration, on utilise uniquement la semi-continuité supérieure de la fonction  $\alpha$ . Cependant, l'application  $x \rightarrow \alpha_l(f, x)$  est toujours semi-continue inférieurement [GL98]. Une fonction  $\alpha$  satisfaisant les hypothèses de la proposition 3.22 est donc forcément continue.

### Fonction cusp

Soit  $\alpha \in (0, 1)$  et  $f(x) = |x|^\alpha$ .

Pour tout  $\rho \in [0, 1]$ , pour tout  $h \in (0, 1]$  :

$$\Delta_{0,0}(h^\rho, h) = |h^{\rho\alpha} - (h^\rho - h)^\alpha|.$$

En utilisant l'inégalité (3.10), on obtient :

$$C_1 |h|^{1+\rho(\alpha-1)} \leq \Delta_{0,0}(h^\rho, h) \leq C_2 |h|^{1+\rho(\alpha-1)}.$$

$f$  étant symétrique, le même encadrement est valable pour  $\Delta_{0,0}(-h^\rho, -h)$ . Ainsi, les deux propositions 3.17 et 3.18 appliquées avec  $u(\rho) = 1 + \rho(\alpha - 1)$  nous permettent de conclure que  $\chi_{0,0}(\rho) = 1 + \rho(\alpha - 1)$ , ce qui nous donne par le théorème 3.5 :

$$\sigma_{0,0}(s') = \min(1, \alpha + s').$$

Comme les graphes de  $\sigma_{0,0}$  et  $\sigma(s')$  coïncident sur  $T_{0,0}$  :  $\sigma(s') = \alpha + s'$  si  $-\alpha \leq s' \leq 1 - \alpha$ .

Le graphe de la frontière 2-microlocale continue sur  $T_{1,0}$ . On doit calculer  $\sigma_{1,0}$  pour le prolonger.

$f(x) = x^{-1}g(x)$  avec  $g(x) = \text{sign}(x) \cdot |x|^{1+\alpha}$  donc, d'après la définition 3.9 :

$$\mathcal{R}_{1,0}(x) = g'(x) = (1 + \alpha)f(x).$$

Ainsi,  $\Delta_{1,0}(t, h) = (1 + \alpha)\Delta_{0,0}(t, h)$ . On en déduit que  $\sigma_{1,0} = \sigma_{0,0}$ .

Ainsi, on s'aperçoit facilement que  $\sigma_{L,0} = \sigma_{0,0}$  pour tout  $L \in \mathbb{N}$ . On a obtenu la frontière pour tout  $s' \geq -\alpha$  :

$$\sigma(s') = \alpha + s'.$$

### Fonction chirp

Soit  $\beta > 0$  et  $\gamma > 0$ . La fonction chirp est définie par

$$f(x) = |x|^\gamma \sin |x|^{-\beta}.$$

Soit  $h > 0$ .

$$f(h^\rho) - f(h^\rho - h) = h^{\rho\gamma} \sin h^{-\rho\beta} - (h^\rho - h)^\gamma \sin (h^\rho - h)^{-\beta}.$$

En utilisant l'équation (3.10), avec  $\alpha = \gamma$  :

$$f(h^\rho) - f(h^\rho - h) = h^{\rho\gamma}(\sin h^{-\rho\beta} - \sin(h^\rho - h)^{-\beta}) + r(h) \quad (3.17)$$

où  $|r(h)| \leq C_2 h^{1+(\rho\gamma-1)}$ .

Or,  $|\sin h^{-\rho\beta} - \sin(h^\rho - h)^{-\beta}| \leq \min(2, h^{-\rho\beta} - (h^\rho - h)^{-\beta})$  donc, en utilisant encore l'équation (3.10) avec  $\alpha = -\beta$

$$|\sin h^{-\rho\beta} - \sin(h^\rho - h)^{-\beta}| \leq C_2 h^{\max(0, 1-\rho(1+\beta))}.$$

En reportant cette inégalité dans (3.17) il vient :

$$|f(h^\rho) - f(h^\rho - h)| \leq C.h^{\rho\gamma + \max(1-\rho(1+\beta), 0)}.$$

En appliquant la proposition 3.17, on obtient :  $\chi_{0,0}(\rho) \geq \rho\gamma + \max(0, 1-\rho(1+\beta))$ .

La majoration de  $\chi_{0,0}$  nécessite le résultat suivant :

**Proposition 3.23.** *Soient  $\theta_1 : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  décroissante et  $\theta_2 : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Si  $\lim_{t \rightarrow 0}(\theta_2(t) - \theta_1(t)) = +\infty$  alors il existe une suite  $t_n$  qui tend vers 0 telle que  $|\sin \theta_1(t_n) - \sin \theta_2(t_n)| \geq 1$ .*

Cette proposition peut être interprétée ainsi : si on suppose  $|\sin \theta_1 - \sin \theta_2| <$

1 alors, dès que  $\theta_2$  “touche les points”  $\pi/2 + 2\pi\mathbb{Z}$  ou  $-\pi/2 + 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $\sin \theta_1$  doit devenir respectivement strictement positif ou strictement négatif. Comme  $\theta_1$  est croissante, sa différence avec le produit de  $\pi$  par le nombre de changements de signes de  $\sin \theta_1$  est minorée, si bien que  $\theta_2 - \theta_1$  serait majorée.

*Preuve.* On raisonne par l’absurde. Supposons qu’il existe  $a > 0$  tel que, pour tout  $t \in (0, a]$ ,  $|\sin \theta_1(t) - \sin \theta_2(t)| < 1$ .

$\theta_1$  est décroissante et  $\theta_2 - \theta_1$  tend vers  $+\infty$  donc  $\theta_2$  tend vers  $+\infty$ .

Pour tout  $t$  assez petit, soit  $m$  l’unique entier  $\geq 1$  tel que  $(\theta_2(t) - \theta_2(a))$  est dans  $(2(m+1)\pi, 2(m+2)\pi]$ . L’intervalle  $[\theta_2(a), \theta_2(t)]$  étant de longueur supérieure à  $2(m+1)\pi$ , il contient alors au moins  $m$  réels dans  $2\pi\mathbb{Z} + \pi/2$ . Soit  $r_{\min}$  le plus petit de ces réels, et  $r_{\max}$  le plus grand. Posons

$$r_k = r_{\min} + k\pi.$$

Comme  $r_0 = r_{\min}$  et  $r_{2(m-1)} \leq r_{\max}$ , les  $r_k$  sont dans  $[\theta_2(a), \theta_2(t)]$  pour tout  $k \in \{0..2(m-1)\}$ .

Par continuité de  $\theta_2$ , il existe  $t_0..t_{2(m-1)}$  dans l’intervalle  $[t, a]$  tels que  $t_k < t_{k-1}$  et

$$\theta_2(t_k) = r_k.$$

Par définition des  $r_k$  :

$$\begin{aligned} \sin \theta_2(t_{2k}) &= 1 \\ \sin \theta_2(t_{2k+1}) &= -1 \end{aligned}$$

Or  $|\sin \theta_1(t) - \sin \theta_2(t)| < 1$  donc :

$$\begin{aligned} \sin \theta_1(t_{2k}) &> 0 \\ \sin \theta_1(t_{2k+1}) &< 0 \end{aligned}$$

Comme  $\theta_1$  est décroissante, il vient  $\lfloor \theta_1(t_{k+1})/\pi \rfloor \geq \lfloor \theta_1(t_k)/\pi \rfloor + 1$ .

On en déduit :  $\lfloor \theta_1(t_{2(m-1)})/\pi \rfloor \geq \lfloor \theta_1(t_0)/\pi \rfloor + 2(m-1)$ , donc

$$\theta_1(t_{2m-1}) \geq \theta_1(t_0) + (2m-2)\pi$$

Finalement,  $\theta_1$  étant décroissante :

$$\theta_1(t) \geq \theta_1(a) + (2m-2)\pi.$$



On conclut en remarquant que, par définition de  $m$  :  $2(m+2)\pi \geq \theta_2(t) - \theta_2(a)$ , ce qui nous donne  $\theta_1(t) \geq \theta_2(t) + \theta_1(a) - \theta_2(a) - 4\pi$ . Ceci étant vrai pour tout  $t$  assez petit,  $\theta_2 - \theta_1$  est majorée au voisinage de 0. Contradiction.  $\square$

Pour tout  $\rho > \frac{1}{1+\beta}$ , les inégalités (3.10) permettent d'affirmer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-\rho\beta} - (h^\rho - h)^{-\beta} = +\infty$$

ce qui implique, en utilisant la proposition 3.23 avec  $\theta_1(h) = h^{-\rho\beta}$  et  $\theta_2(h) = (h^\rho - h)^{-\beta}$  qu'il existe une suite  $h_n$  tendant vers 0 telle que :

$$|\sin h_n^{-\rho\beta} - \sin((h_n^\rho - h_n)^{-\beta})| \geq 1.$$

En reportant ceci dans l'équation (3.17) :

$$|f(h_n^\rho) - f(h_n^\rho - h_n)| \geq h_n^{\rho\gamma} - |r(h_n)|$$

avec  $|r(h_n)| \leq C_2 \cdot h_n^{1+\rho(\gamma-1)}$ .

Comme  $\rho\gamma < 1 + \rho(\gamma - 1)$ ,  $r(h_n) = o(h_n^{\rho\gamma})$  et  $\Delta(h_n^\rho, h_n) \geq h_n^{\rho\gamma}/2$  pour  $n$  assez grand. L'utilisation de la proposition 3.18 conduit à  $\chi_{0,0}(\rho) \leq \rho\gamma$ .

Pour tout  $\rho < \frac{1}{1+\beta}$ , les inégalités (3.10) permettent d'affirmer que

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^{-\rho\beta} - (h^\rho - h)^{-\beta} = 0.$$

Posons  $h_n = (2n\pi)^{-\frac{1}{\rho\beta}}$ . En utilisant de nouveau les inégalités (3.10) :

$$|\sin h_n^{-\rho\beta} - \sin((h_n^\rho - h_n)^{-\beta})| \geq C_1 h_n^{1-\rho(1+\beta)}.$$

En reportant dans (3.17) :

$$|f(h_n^\rho) - f(h_n^\rho - h_n)| \geq C_1 h_n^{\rho\gamma+1-\rho(1+\beta)} - |r(h_n)|$$

avec  $r(h_n) = o(h_n^{\rho\gamma+1-\rho(1+\beta)})$ . Pour  $n$  assez grand :  $\Delta(h_n^\rho, h_n) \geq \frac{C_1}{2} h_n^{\rho\gamma+1-\rho(1+\beta)}$ .

La proposition 3.18 donne donc :  $\chi_{0,0}(\rho) \leq \rho\gamma + 1 - \rho(1 + \beta)$ .

Finalement, pour tout  $\rho \in [0, 1]$  avec  $\rho \neq \frac{1}{1+\beta}$  :

$$\chi_{0,0}(\rho) \leq \rho\gamma + \max(1 - \rho(1 + \beta), 0).$$

Il reste à calculer la valeur de  $\chi(\frac{1}{1+\beta})$  : la semi-continuité inférieure de  $\chi_{0,0}$  nous permet d'affirmer que  $\chi_{0,0}(\rho) \leq \rho\gamma + \max(1 - \rho(1 + \beta), 0)$  pour tout  $\rho \in [0, 1]$ .

Finalement, grâce à la minoration de  $\chi_{0,0}$  obtenue précédemment :

$$\chi_{0,0}(\rho) = \rho\gamma + \max(1 - \rho(1 + \beta), 0)$$

Par le theoreme 3.5, il s'ensuit que  $\sigma_{0,0}(s') = \min(1, \frac{\gamma+s'}{1+\beta}, \gamma + s')$ . Ceci implique que  $\sigma(s') = \frac{\gamma+s'}{1+\beta}$  pour tout  $s'$  tel que  $(\sigma(s'), s') \in T_{0,0}$ .

Il serait possible de tracer le reste de la frontière, en dérivant ou en divisant la fonction initiale. Cependant, le calcul devient alors assez fastidieux.

### Fonction de Weierstrass

La fonction de Weierstrass est définie par :

$$W_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-\alpha k} \sin(2\pi \lambda^k x)$$

avec  $\lambda \geq 2$  et  $\alpha \in (0, 1)$ . Historiquement, elle a été le premier exemple de fonction continue partout et dérivable nulle part. Voir par exemple [Har16].

Le spectre 2-microlocal temporel entier  $\chi_{0,0}$  est difficile à obtenir. Néanmoins, les inégalités obtenues sur les valeurs du spectre nous permettent de déduire la frontière 2-microlocale partielle  $\sigma_{0,0}$  en tout point.

Le résultat bien connu suivant [Fal03] nous permet de conclure :

Pour tout point  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\alpha_l(W_\alpha, x) = \alpha_p(W_\alpha, x) = \alpha.$$

On a donc immédiatement la frontière 2-microlocale de  $W_\alpha$  au point  $x_0$  grâce à la proposition 3.22 :

$$\sigma_{0,0}(s') = \min(\alpha, \alpha + s').$$

On sait de plus, grâce aux propositions 3.20 et 3.21 qu'en tout point  $x_0$ , le spectre 2-microlocal  $\chi_{0,0}$  de  $W_\alpha$  vérifie :

$$\chi_{0,0}(0) = \chi_{0,0}(1) = \min_{\rho \in [0,1]} \chi_{0,0}(\rho) = \alpha.$$

## Fonction de Weierstrass généralisée

Le résultat suivant a été montré dans [DLVM98] :

**Proposition 3.24.** [DLVM98] Soit  $s$  une fonction continue de  $[0, 1]$  vers  $[a, b] \subset (0, 1)$  telle que :

$$s(x) < \alpha_p(s, x) \quad \forall x \in [0, 1]$$

Supposons aussi qu'il existe une constante  $M > 0$  telle que :

$$|s(t) - s(u)| \leq M|t - u|^{\alpha_s(t)} \quad \forall (t, u) \in [0, 1]^2$$

Alors la fonction  $f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda^{-ks(x)} \sin(\lambda^k x)$  vérifie :

$$\alpha_p(f, x) = s(x).$$

De plus, on vérifie facilement que  $\alpha_l(f, x) = s(x)$ .

On a donc, sous les hypothèses de la proposition 3.24 et grâce à la proposition 3.22, la frontière 2-microlocale de  $f$  au point  $x_0$  :

$$\sigma_{0,0}(s') = \min(s(x_0), s(x_0) + s').$$

On sait de plus que, en tout point  $x_0$ , le spectre 2-microlocal  $\chi_{0,0}$  de  $f$  vérifie :

$$\chi_{0,0}(0) = \chi_{0,0}(1) = \min_{\rho \in [0,1]} \chi_{0,0}(\rho) = s(x_0).$$

### 3.3.5 Estimations numériques

Supposons que l'on sache estimer de manière exacte  $\chi_{L,S}^\epsilon(\rho)$ . Alors le calcul de  $\sigma_{L,S}$  peut encore sembler problématique, puisqu'il faudrait faire tendre  $\epsilon$  vers 0 pour tout  $\rho \in [0, 1]$  avant de chercher le minimum de  $\rho s' + \chi_{L,S}^\epsilon(\rho)$  sur  $[0, 1]$ . La proposition suivante montre qu'il est possible de se limiter au calcul de  $\chi_{L,S}^\epsilon(\rho)$  pour une valeur fixée de  $\epsilon$  et un nombre fini de valeurs de  $\rho$ , avec une erreur précisément majorée.

**Proposition 3.25.** Soit  $\epsilon > 0$ . Soient  $\rho_1 \dots \rho_n$  tels que  $[0, 1] \subset \bigcup_{k=1..n} (\rho_k - \epsilon, \rho_k + \epsilon)$ . Alors :

$$\left| \sigma_{L,S}(s') - \min_{k=1..n} (\chi_{L,S}^\epsilon(\rho_k) + \rho_k s') \right| \leq \epsilon |s'|$$

*Preuve.* La preuve est très simple avec la proposition 3.16 : pour tout  $k$  :

$$\min_{[\rho_k - \epsilon, \rho_k + \epsilon]} \chi_{L,S}(\rho) \leq \chi_{L,S}^\epsilon(\rho_k) \leq \inf_{(\rho_k - \epsilon, \rho_k + \epsilon)} \chi_{L,S}(\rho).$$

En ajoutant  $\rho_k s'$  à chaque membre de cette inégalité et en remarquant que pour tout  $\rho \in [\rho_k - \epsilon, \rho_k + \epsilon]$ ,  $\rho s' - \epsilon|s'| \leq \rho_k \leq \rho s' + \epsilon|s'|$ , il vient :

$$-\epsilon|s'| + \min_{[\rho_k - \epsilon, \rho_k + \epsilon]} (\chi_{L,S}(\rho) + \rho s') \leq \chi_{L,S}^\epsilon(\rho_k) + \rho_k \leq \epsilon|s'| + \inf_{(\rho_k - \epsilon, \rho_k + \epsilon)} \chi_{L,S}(\rho)$$

On obtient le résultat en prenant le minimum sur tous les  $\rho_k$ , en utilisant l'hypothèse  $[0, 1] \subset \bigcup_{k=1..n} (\rho_k - \epsilon, \rho_k + \epsilon)$  puis en appliquant le théorème 3.5.  $\square$

Rappelons que les valeurs intéressantes de  $\sigma_{L,S}(s')$  se situent dans la plage  $s' \in [-1, 1]$ . En effet,  $\sigma_{L,S}(s')$  donne accès à la frontière 2-microlocale  $\sigma$  grâce à la proposition 3.15. Cette proposition est valable pour  $(s, \sigma) \in (0, 1)^2$ , et  $s' = s - \sigma$  est bien dans  $[-1, 1]$ . L'erreur commise peut donc se majorer encore plus simplement par  $\epsilon$  :

**Corollaire 3.1.** *Soit  $\epsilon > 0$ . Soient  $\rho_1 \dots \rho_n$  tels que  $[0, 1] \subset \bigcup_{k=1..n} (\rho_k - \epsilon, \rho_k + \epsilon)$ . Alors, pour tout  $s' \in (-1, 1)$  :*

$$\left| \sigma_{L,S}(s') - \min_{k=1..n} (\chi_{L,S}^\epsilon(\rho_k) + \rho_k s') \right| \leq \epsilon$$

De plus, l'erreur effectuée est nulle en  $s' = 0$ .

**Corollaire 3.2.** *Soient  $\rho_1 \dots \rho_n$  tels que  $[0, 1] \subset \bigcup_{k=1..n} (\rho_k - \epsilon, \rho_k + \epsilon)$ . Alors :*

$$\sigma_{L,S}(0) = \min_{k=1..n} (\chi_{L,S}^\epsilon(\rho_k))$$

Intéressons-nous maintenant au calcul de  $\chi_{L,S}^\epsilon$ . Il n'existe pas de méthode générale pour calculer une  $\liminf$ . Nous avons adopté la démarche suivante :

Supposons  $\rho$  et  $\epsilon$  fixés. Considérons l'ensemble :

$$E(z) = \left\{ (t, h) \in D(\rho, \epsilon) : \frac{\log \Delta_{L,S}(t, h)}{\log |h|} > z \right\}$$

et soit  $F(z)$  la distance de  $E(z)$  à l'origine.  $F(z)$  est nulle si, et seulement si  $z$  est inférieur à  $\chi_{L,S}^\epsilon(\rho)$ .

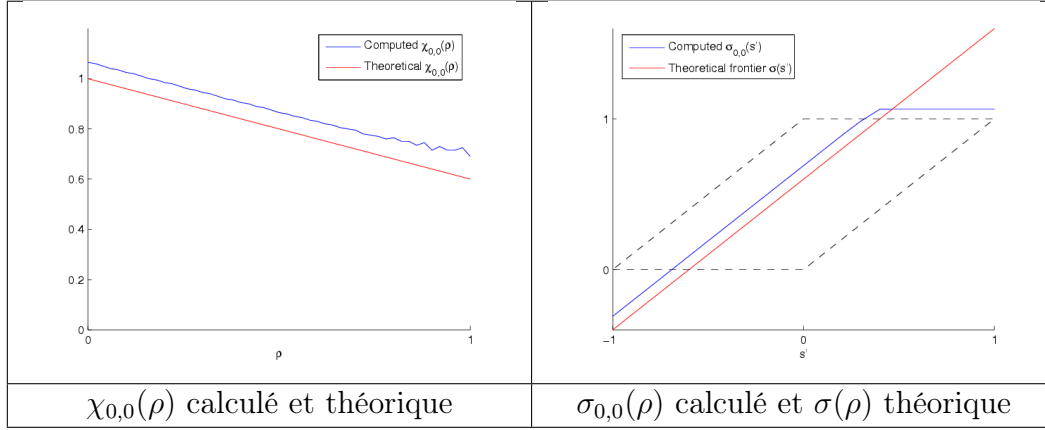


FIG. 3.9 – Calcul de  $\chi_{0,0}$  et  $\sigma_{0,0}$  pour la fonction cusp

Dans le cas idéal,  $\log F(z)$  est donc fini si  $z < \chi_{L,S}^\epsilon(\rho)$  et vaut  $-\infty$  si  $z \geq \chi_{L,S}^\epsilon(\rho)$ .

Il est donc raisonnable d'espérer observer une "chute" de  $\log F$  près de  $\chi_{L,S}^\epsilon(\rho)$  en pratique.

Les figures 3.9, 3.10, 3.11, 3.12 et 3.13 montrent des exemples de résultats obtenus par cette méthode.

Sur la figure 3.9, on voit les résultats de la méthode appliquée à un cusp :  $x \rightarrow |x|^\alpha$  au point  $x_0 = 0$ . On peut en particulier remarquer que  $\sigma_{0,0}$  et  $\sigma$  coïncident uniquement sur  $T_{0,0}$ . Ceci est en accord avec la proposition 3.15, qui assure leur coïncidence uniquement sur ce domaine. Pour obtenir le tracé de la frontière en dehors de cet ensemble, il serait nécessaire de dériver la fonction pour calculer  $\chi_{1,0}$ , puis  $\sigma_{1,0}$ , qui coïncide avec  $\sigma$  sur  $\{(1+s', 1+\sigma) : \sigma \in (0, 1); \sigma - s' \in (0, 1)\}$ .

Sur la figure 3.10, on lit les résultats obtenus en appliquant la méthode à une fonction de Weierstrass, avec  $\lambda = 2$  et  $\alpha = 1/2$ . Cette application numérique semble suggérer que pour tout  $\rho$ ,  $\chi(\rho) = 1/2$ . On a également vérifié que les résultats varient peu en fonction du point  $x_0$  choisi.

Sur les figures 3.11, 3.12 et 3.13, on lit les résultats obtenus en appliquant la méthode à une somme de chips :  $x \rightarrow |x|^{\gamma_1} \sin \frac{1}{|x|^{\beta_1}} + |x|^{\gamma_2} \sin \frac{1}{|x|^{\beta_2}}$  au point  $x_0 = 0$ . Comme la forme de la frontière dépend des paramètres  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  et  $\beta_2$  (respectivement égaux dans l'exemple à 2.2, 0.25, 1.76 and 0.88), il semble possible d'utiliser cette méthode pour retrouver ces paramètres.

La détection et la séparation de deux chirps centrés en un même point est une

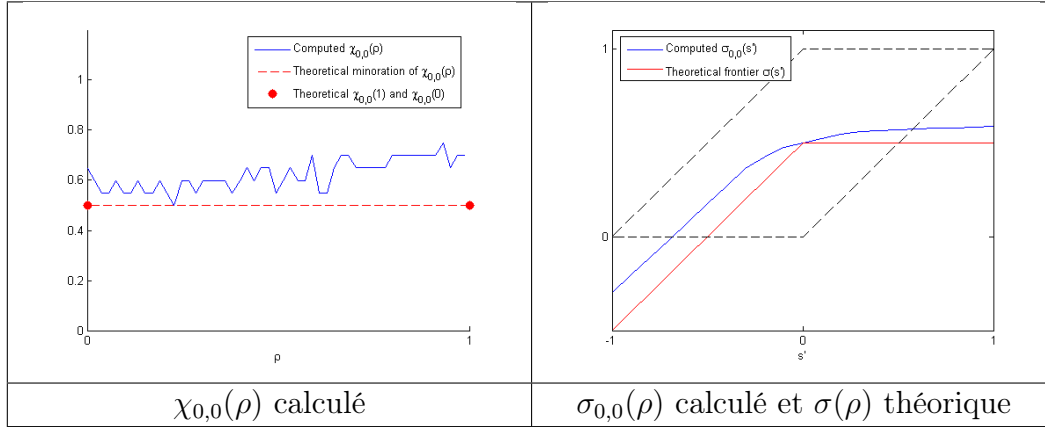


FIG. 3.10 – Calcul de  $\chi_{0,0}$  et  $\sigma_{0,0}$  pour la fonction de Weierstrass avec  $\alpha = 0.5$ .

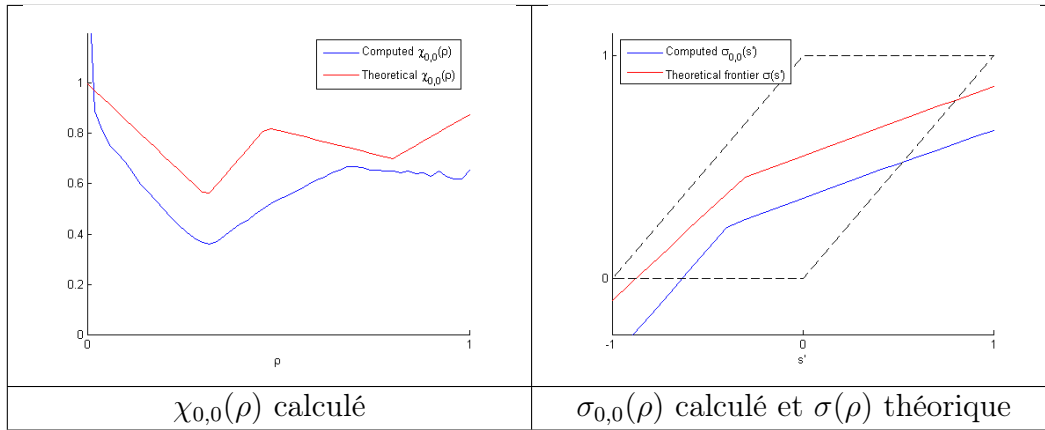


FIG. 3.11 – Calcul de  $\chi_{0,0}$  et  $\sigma_{0,0}$  pour une somme de deux chirps (échantillonnage linéaire)

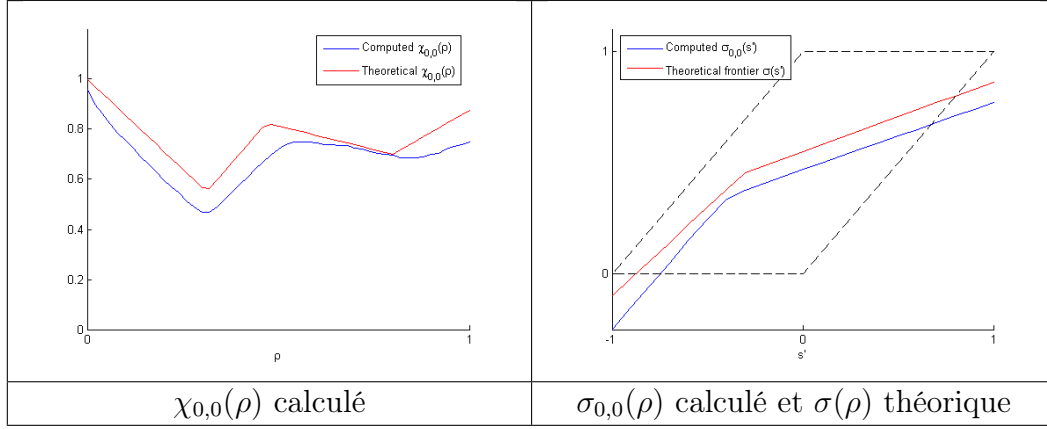


FIG. 3.12 – Calcul de  $\chi_{0,0}$  et  $\sigma_{0,0}$  pour une somme de deux chirps (échantillonnage non linéaire)

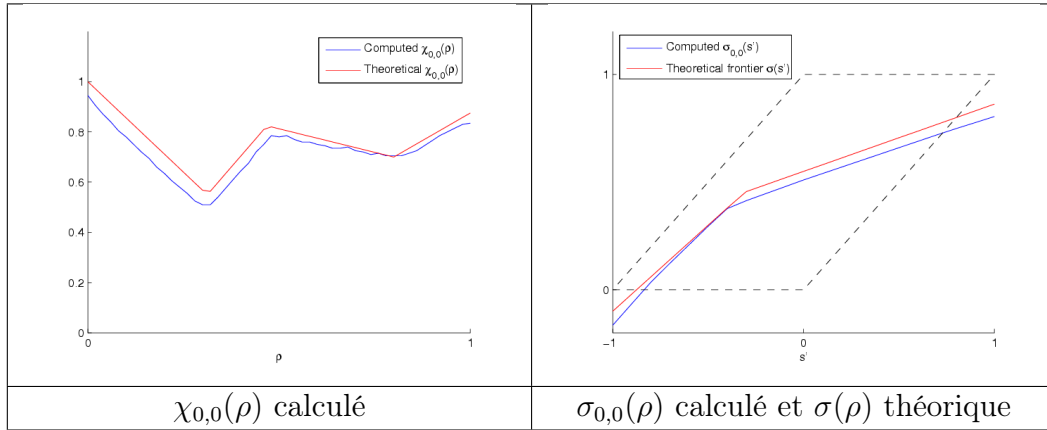


FIG. 3.13 – Calcul de  $\chi_{0,0}$  et  $\sigma_{0,0}$  pour une somme de deux chirps avec un échantillonnage non linéaire et une très grande résolution maximale.

tâche difficile. Ces résultats sont donc intéressants de ce point de vue. Néanmoins, il faut mentionner la nécessité d'une bonne résolution autour du point  $x_0$ . La figure 3.12 présente les résultats obtenus avec un échantillonnage logarithmique de la forme  $t_k = x_0 + 10^{-r_k}$  où  $r_k$  varie de 0 à  $-12$  avec un pas de  $10^{-3}$ . On voit que les résultats sont meilleurs que ceux de la figure 3.11, pour laquelle l'échantillonnage est régulier,  $t_k$  variant de 0 à 0.9 avec un pas de  $2 \cdot 10^{-4}$  et qui comporte cependant plus de points. On a mis à titre indicatif (figure 3.13) les résultats obtenus avec un échantillonnage de la forme  $t_k = x_0 + 10^{-r_k}$  avec  $r_k$  variant de 0 à  $-60$  avec un pas de  $-0.05$ . On voit qu'on arrive à très bien estimer la frontière dans ce cas, ceci au prix d'une grande résolution maximale.

Un facteur limitant dans ce type de calcul du spectre 2-microlocal est le nombre de points  $n$  pris en compte. En effet, l'algorithme nécessite le calcul de  $\Delta_{0,0}(t, h)$ , dont le nombre de termes est proportionnel à  $n^2$ . Même avec un matériel assez récent, il n'a pas été possible de prendre plus de 5000 points en compte. Il serait sans doute possible d'augmenter ce nombre en optimisant l'algorithme, mais il reste plafonné. L'exemple précédent du calcul de la somme de chirps semble indiquer que, dans le cas d'un signal réel, il pourrait être intéressant, une fois le point  $x_0$  localisé, de ne pas prendre tous les points du signal mais de "choisir" les points que l'on veut prendre en compte de telle manière que leur densité augmente quand on se rapproche de  $x_0$ .

Enfin, une dernière remarque est que le fait de prendre la transformée de Legendre d'une fonction définie sur  $[0, 1]$  assure l'obtention d'une fonction convexe de pente comprise entre 0 et 1. Ainsi, les erreurs dans l'estimation de  $\chi_{L,S}^\epsilon$  seront souvent "gommées" par la transformée de Legendre. En particulier, si l'estimateur  $\tilde{\chi}_{LS}$  a la même enveloppe convexe que  $\chi_{LS}$ , la frontière estimée coïncide avec la frontière théorique. Nous n'avons pas étudié cet aspect en détail.



# Chapitre 4

## Un parallèle entre formalisme 2-microlocal et formalisme multifractal

### 4.1 Introduction

Le formalisme 2-microlocal et le formalisme multifractal faible comportent des similitudes. Cette partie a pour but de présenter un cadre commun à ces deux formalismes, de retrouver les résultats sur le formalisme 2-microlocal et multifractal dans ce cadre commun plus précis et plus simple, et enfin de prescrire les spectres. Les résultats de ce chapitre ont été obtenus en collaboration avec Claude Tricot.

### 4.2 Notions générales

Nous rappelons dans la section 4.2.1 des définitions et résultats sur les fonctions d'ensemble qui sont classiques. Nous spécialisons ensuite ces résultats dans 4.2.2, dans un cas qui sera pertinent pour les analyses 2-microlocale et multifractale.

#### 4.2.1 Cadre commun

On se donne une fonction  $F : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ . Elle est *croissante* si pour tous les ensembles réels  $E_1, E_2$ ,

$$E_1 \subset E_2 \Rightarrow F(E_1) \leq F(E_2).$$

Elle est *stable* (vis-à-vis de la réunion) si

$$F(E_1 \cup E_2) = \max\{F(E_1), F(E_2)\}.$$

Etant donné un réel  $k$ , elle est  $k$ -stable si

$$F(E_1 \cup E_2) - k \leq \max\{F(E_1), F(E_2)\} \leq F(E_1 \cup E_2) + k.$$

On vérifie aisément que si une fonction  $G : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est croissante et sous-additive ( $G(E_1 \cup E_2) \leq G(E_1) + G(E_2)$ ), alors  $F = \log G$  est  $k$ -stable pour  $k = \log 2$ .

### Croissance de F

Supposons  $F$  croissante. Pour tout réel  $\alpha$  la fonction  $F([\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon])$  admet une limite lorsque  $\epsilon$  tend vers 0. On peut alors définir la *fonction localisée* (aussi appelée *limite max-plus*).

$$F^{loc}(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F([\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]).$$

**Lemme 4.1.** *Soit  $F$  croissante. Pour tout ouvert  $O$  de  $\mathbb{R}$ ,*

$$\sup_{\alpha \in O} F^{loc}(\alpha) \leq F(O). \quad (4.1)$$

*Preuve.* En effet si  $\alpha \in O$  il existe  $\epsilon$  tel que  $[\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon] \subset O$ , donc  $F([\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]) \leq F(O)$ .  $\square$

**Lemme 4.2.** *Si  $F$  est croissante,  $F^{loc}$  est semi-continue supérieurement.*

*Preuve.* Le lemme précédent implique que pour  $\epsilon > 0$ ,  $\sup_{\beta \in (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)} F^{loc}(\beta) \leq F((\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon))$ . En faisant tendre  $\epsilon$  vers 0 on obtient la semi-continuité de  $F^{loc}$  en  $\alpha$   $\square$

**Lemme 4.3.** *Si  $F$  est croissante,  $F^{loc}$  atteint son sup sur tout compact de  $\mathbb{R}$ .*

*Preuve.* C'est une conséquence directe de la semi-continuité.  $\square$

### Stabilité de F

Si  $F$  est stable, elle est aussi croissante : en effet, si  $E_1 \subset E_2$ ,

$$F(E_1) \leq \max\{F(E_1), F(E_2)\} = F(E_1 \cup E_2) = F(E_2).$$

**Lemme 4.4.** *Soit  $F$  stable. Pour tout compact  $K$  de  $\mathbb{R}$ ,*

$$F(K) \leq \max_{\alpha \in K} F^{loc}(\alpha). \quad (4.2)$$

*Preuve.* On utilise le réseau d'intervalles dyadiques fermés dans  $\mathbb{R}$ . Comme  $K$  est borné, il est recouvert par un nombre fini d'intervalles dyadiques de rang 0 (de longueur 1). Comme  $F$  est stable, l'un de ces intervalles, notons-le  $J_0$ , est tel que  $F(J_0 \cap K) = F(K)$ . Mais  $J_0$  est recouvert par deux intervalles de rang 1 :  $J'$  et  $J''$ . L'un de ces deux intervalles, notons-le  $J_1$ , vérifie aussi  $F(J_1 \cap K) = F(K)$ . Par récurrence, il est possible de construire une suite emboîtée  $(J_n)$  d'intervalles dyadiques tels que pour tout  $n$ ,  $F(J_n \cap K) = F(K)$ .

Soit  $\alpha_*$  la limite des  $J_n$ . Comme  $K$  est fermé,  $\alpha_*$  est un point de  $K$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un entier  $n$  tel que  $J_n \subset [\alpha_* - \epsilon, \alpha_* + \epsilon]$ . Par croissance de  $F$  on en tire :  $F(J_n) \leq F([\alpha_* - \epsilon, \alpha_* + \epsilon])$ . Donc  $F(K) \leq F([\alpha_* - \epsilon, \alpha_* + \epsilon])$ , et en faisant tendre  $\epsilon$  vers 0 :  $F(K) \leq F^{loc}(\alpha_*)$ . Donc  $F(K) \leq \sup_{\alpha \in K} F^{loc}(\alpha)$ .

Enfin, comme  $F$  est croissante,  $F^{loc}$  atteint son sup sur  $K$ . □

**Corollaire 4.1.** *Soit  $F$  stable et  $K$  un compact d'intérieur  $\overset{\circ}{K}$  non vide. Alors*

$$\sup\{F^{loc}(\alpha)/\alpha \in \overset{\circ}{K}\} \leq F(K) \leq \max\{F^{loc}(\alpha)/\alpha \in K\}. \quad (4.3)$$

*Preuve.* Il suffit de combiner les lemmes 4.1 et 4.4. □

L'équation (4.3) entraîne directement que pour tous  $\alpha$  et  $\epsilon$ ,

$$\sup_{|\beta - \alpha| < \epsilon} F^{loc}(\beta) \leq F([\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]) \leq \max_{|\beta - \alpha| \leq \epsilon} F^{loc}(\beta). \quad (4.4)$$

### Un exemple simple

Cet exemple a pour but de montrer une application immédiate de ce qui précède et d'introduire quelques notations qui seront utilisées par la suite.

Étant donnée une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on en tire une fonction d'ensembles en posant

$$M(g, E) = \sup_{t \in E} g(t). \quad (4.5)$$

On voit immédiatement que  $M$  est stable.

On peut donc appliquer ce qui précède. La fonction localisée correspondante  $\bar{g}$  est bien définie et elle est semi-continue supérieurement :

$$\bar{g}(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} M(g, [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]). \quad (4.6)$$

On vérifie aisément sur (4.6) que c'est la plus petite fonction semi-continue supérieurement plus grande que  $g$ , appelée aussi son enveloppe semi-continue supérieure.

Enfin, les inégalités (4.3) nous donnent que, pour tout compact  $K$  d'intérieur non vide :

$$\sup\{\bar{g}(\alpha)/\alpha \in \overset{\circ}{K}\} \leq \sup_{t \in K} g(t) \leq \sup\{\bar{g}(\alpha)/\alpha \in K\}.$$

Des résultats symétriques peuvent être obtenus en posant

$$m(g, E) = \inf_{t \in E} g(t). \quad (4.7)$$

L'enveloppe semi-continue inférieure de  $g$  est  $\underline{g}(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} m(g, [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon])$ . Comme  $(-m)$  est stable, on obtient la semi-continuité inférieure de  $\underline{g}$  et l'encadrement :

$$\inf\{\underline{g}(\alpha)/\alpha \in K\} \leq \inf_{t \in K} g(t) \leq \inf\{\underline{g}(\alpha)/\alpha \in \overset{\circ}{K}\}.$$

### 4.2.2 Forme particulière de $F$

Les applications qui vont suivre se rapportent toutes à des fonctions d'ensembles  $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  qui sont de la forme que nous allons décrire ici.

On se donne

- Un sous-ensemble  $L$  de  $\mathbb{R}^n$  dont l'adhérence contient l'origine 0  
Par exemple  $L = (0, 1]$ ,  $L = \{k2^{-j}, (j, k) \in \mathbb{Z}^2\}$  ou  $L = (0, 1] \times (0, 1]$ .
- Une fonction  $h : L \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  telle que  $\lim_{t \rightarrow 0} h(t) = 0$

Etant donnée une fonction

$$U : \begin{cases} L \times \mathcal{P}(\mathbb{R}) & \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ (t, E) & \rightarrow U_t(E) \end{cases}$$

on pose :

$$F_U(E) = \limsup_{t \rightarrow 0} \{ h(t)U_t(E) : t \in L \}. \quad (4.8)$$

**Proposition 4.1.** *On suppose que pour un certain réel  $k$  et pour tout  $t \in L$ ,  $U_t$  est  $k$ -stable. Soit  $F_U$  définie par (4.8). Alors  $F_U$  est stable.*

*Preuve.* On sait que pour tout  $t \in L$  et pour tout  $(E_1, E_2)$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R})^2$ ,

$$U(t, E_1 \cup E_2) - k \leq \max\{U_t(E_1), U_t(E_2)\} \leq U(t, E_1 \cup E_2) + k.$$

On multiplie par  $h(t)$  et on passe à la limite supérieure pour obtenir le résultat.  $\square$

Le résultat technique suivant sera utilisé pour prouver les propositions 4.2, 4.7, 4.13 et 4.14 :

**Lemme 4.5.** *Soit un réel  $k$ , et  $U, V$  telles que  $U_t, V_t$  sont  $k$ -stables pour tout  $t$ .*

*On suppose qu'il existe une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et deux constantes  $c_1$  et  $c_2$  strictement positives telles que pour tout  $t$  et pour tout intervalle compact  $I$ ,*

$$c_1 + U_t(I) + \frac{m(g, I)}{h(t)} \leq V_t(I) \leq c_2 + U_t(I) + \frac{M(g, I)}{h(t)}. \quad (4.9)$$

*Alors pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$F_U^{loc}(t) + \underline{g}(t) \leq F_V^{loc}(t) \leq F_U^{loc}(t) + \bar{g}(t). \quad (4.10)$$

*De plus, pour tout compact  $K$  d'intérieur non vide,*

$$\sup_{\alpha \in \overset{\circ}{K}} \{F_U^{loc}(t) + \underline{g}(t)\} \leq F_V(K) \leq \sup_{t \in K} \{F_U^{loc}(t) + \bar{g}(t)\}. \quad (4.11)$$

*Enfin, si  $g$  est continue, alors :*

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \{g(\alpha) + F_U^{loc}(\alpha)\} = \lim_{R \rightarrow \infty} F_V([-R, R]). \quad (4.12)$$

*Preuve.* En multipliant (4.9) par  $h(t)$  et en prenant la  $\limsup$  quand  $t$  tend vers 0, on obtient

$$F_U(I) + m(g, I) \leq F_V(I) \leq F_U(I) + M(g, I). \quad (4.13)$$

On remplace  $I$  par  $[t - \epsilon, t + \epsilon]$  et on fait tendre  $\epsilon$  vers 0 pour obtenir (4.10).

Comme  $F_V$  est stable (proposition 4.1), il suffit d'utiliser (4.2) et (4.10) pour obtenir (4.11).

Prenons une fonction  $g$  continue. Lorsqu'on pose  $I = [-R, R]$  et qu'on fait tendre  $R$  vers l'infini, les inégalités (4.11) se réduisent à l'égalité (4.12)

□

On peut faire une remarque à propos de l'égalité (4.12) : la croissance permet de dire que  $F_V(\mathbb{R}) \geq \lim_R F_V([-R, R])$ , mais ces deux termes ne sont pas égaux en général.

## 4.3 Analyse multifractale

### 4.3.1 Introduction

Plutôt que chercher à caractériser en tout point la régularité d'une fonction, on peut chercher à estimer la répartition des points en fonction de leur régularité. C'est le but de l'analyse multifractale, via le calcul des spectres de Hausdorff, de grandes déviations et de Legendre.

L'analyse multifractale est un domaine qui a connu de nombreux développements depuis sa création. Des progrès ont été faits en ce qui concerne le domaine de validité du formalisme multifractal, que ce soit dans un cadre déterministe ou aléatoire [AP96, BL04, BMP92]. Limitée à l'origine aux mesures, elle a été étendue aux fonctions [Jaf97b] et aux suites de capacités [LV98]. Des spectres plus raffinés et des procédures d'estimations ont également été mis au point [CJ92, Lév96]. Il a également été mentionné dans [LTar] et dans [LS04] la possibilité de remplacer la borne sup par une somme sur les puissances des grandeurs considérées, afin de permettre un calcul numérique plus stable. Chacun des spectres précédemment cités est plus ou moins difficile à calculer suivant les cas et contient des informations différentes. Ainsi, les relations entre ces spectres ont été étudiées. Le formalisme multifractal fort s'intéresse aux cas où le spectre de Hausdorff est égal au spectre de Legendre de grandes déviations. Le formalisme multifractal faible s'intéresse aux cas où le spectre de grandes déviations est égal au spectre de Legendre. C'est au formalisme multifractal faible que nous nous limitons ici.

Introduit initialement comme un moyen d'estimer le spectre de Hausdorff, le spectre de grandes déviations a bientôt montré son intérêt en tant que tel,

et ce en particulier dans les applications (voir par exemple [LR97, LVV98]). Un désavantage de la définition initiale du spectre de grandes déviations est qu'elle fait intervenir une partition arbitraire du support du signal. Ainsi, des partitions différentes peuvent mener à des spectres de grandes déviations différents. Pour pallier cet inconvénient, un spectre de grandes déviations “continu” a été introduit dans [LTar]. Nous ferons donc dans cette partie la distinction entre le spectre de grande déviations discret, qui correspond à la définition originale, et le spectre de grandes déviations continu.

Le spectre de Legendre discret est, sous certaines conditions, l'enveloppe concave du spectre de grande déviations discret. Le spectre correspondant en continu, défini dans [LTar], est aussi sous certaines conditions l'enveloppe concave du spectre de grandes déviations continu.

Afin de nous placer dans le cadre le plus général possible et en suivant la démarche de [LTar], nous définissons les spectres pour une *fonction d'ensemble abstraite*  $A$  plutôt que pour les exposants de Hölder de mesures ou de fonctions d'une variable réelle, comme ceci est fait habituellement. Pour se ramener aux cas usuels, on poserait :

- Pour l'analyse d'une mesure borélienne,  $A(u) = \log \mu(u) / \log |u|$ .
- Pour l'analyse d'une fonction,  $A(u) = \log v_z(u) / \log |u|$ , où  $v_z(u)$  mesure la “variation” de  $z$  dans l'intervalle  $u$ . Des choix courants sont les accroissements  $|z(u_{max}) - z(u_{min})|$  (où  $u = [u_{min}, u_{max}]$ ), l'oscillation  $\sup_{t \in u} z(t) - \inf_{t \in u} z(t)$  ou bien, quand  $u$  est l'intervalle dyadique  $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ , le module du coefficient d'ondelettes de  $z$  à l'échelle  $n$  et à la localisation  $k$  (ce choix nécessite de la prudence car le spectre résultant dépend de l'ondelette analysante).

Dans cette partie, nous appliquons les résultats de la section 4.2, afin de retrouver le formalisme multifractal faible, dans un cadre discret puis dans un cadre continu. Nous exposons également quelques résultats nouveaux sur le formalisme multifractal faible, dans le cas où  $A(u) = \log \mu(u) / \log |u|$ , où  $\mu$  est une mesure absolument continue.

### 4.3.2 Notations

On note  $\mathcal{X}$  l'ensemble des intervalles fermés inclus dans  $[0, 1]$ .

On note  $\mathcal{X}_n$  l'ensemble des intervalles de la forme  $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$  où  $k \in$

$[0..2^n]$ .

On note  $|E|$  la mesure de Lebesgue d'un ensemble.

Si  $\mathcal{R}$  est un ensemble d'intervalles, on note  $\cup\mathcal{R} = \cup\{I : I \in \mathcal{R}\}$

### 4.3.3 Formalisme multifractal discret

#### Spectre de grande déviations discret

Le spectre de grandes déviations discret décrit le comportement asymptotique de la densité des intervalles de  $\mathcal{X}_n$  ayant un exposant de Hölder de grain proche d'une valeur donnée.

On se donne une fonction  $A : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$ , afin de se placer dans un cadre général.

Pour tout ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}$  on note  $N(n, E)$  le nombre d'intervalles de  $\mathcal{X}_n$  tel que  $A(I)$  se trouve dans  $E$  :

$$N(n, E) = \#\{I \in \mathcal{X}_n \text{ tels que } A(I) \in E\}.$$

On veut maintenant évaluer le comportement de  $N(n, E)$  quand  $n$  tend vers l'infini : on considère la fonction :

$$F_g^d(E) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N(n, E)}{n \log 2}$$

et sa version localisée

$$f_g^d(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_g^d([\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]).$$

C'est le *spectre de grandes déviations* discret associé à  $A$  [Fal03, LV98]

Heuristiquement, si pour tout  $\epsilon$ , le nombre d'intervalles  $I$  de  $\mathcal{X}_n$  pour lesquels  $A(I)$  se situe dans l'intervalle  $[\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon]$  est proportionnel à  $2^{r \cdot n}$ , alors  $f_g^d(\alpha_0) = r$ . Une autre formulation qui fait le lien avec le spectre continu, est la suivante : si, pour tout  $\epsilon$ , la réunion des intervalles  $I$  dyadiques de longueur  $2^{-n}$  pour lesquels  $A(I)$  se situe dans  $[\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon]$  est de mesure proportionnelle à  $2^{-n} \cdot 2^{r \cdot n}$ , alors  $f_g^d(\alpha_0) = r$ .



## Spectre de Legendre discret

On définit pour tout  $q \in \mathbb{R}$  :

$$S^q(n) = \sum \{2^{-nqA(I)} : I \in \mathcal{X}_n \text{ et } A(I) < \infty\}$$

et

$$\tau^d(q) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log S^q(n)}{-n \log 2}.$$

Pour la suite, on aura besoin des quantités

$$S^q(n, E) = \sum \{2^{-nqA(I)} : I \in \mathcal{X}_n \text{ et } A(I) \in E\}$$

Le spectre de Legendre discret [AP96, BMP92, CLP87, EM92, Fal03, FP85, HJK<sup>+</sup>86, Jaf91, LV98, Ols95] associé à  $A$  est la transformée de Legendre de  $\tau^d$  :

$$f_l^d(\alpha) = \sup_{q \in \mathbb{R}} \{q\alpha - \tau^d(q)\}$$

### Application de la section 4.2.2

Nous allons appliquer les résultats de la section 4.2.2 aux grandeurs définies sections 4.3.3 pour étudier le formalisme multifractal faible.

Les considérations de la section 4.2.2 peuvent s'appliquer aux grandeurs définies sections 4.3.3 et 4.3.3 dans un cadre discret, en posant :

$$L = \{2^{-n}, n \in \mathbb{N}\}$$

$$h(2^{-n}) = 1/(n \log 2)$$

$$U_{2^{-n}}(E) = \log N(n, E)$$

De façon évidente :  $E \rightarrow N(n, E)$  est croissante et sous-additive (voir section 4.2.1).  $U_{2^{-n}}$  est donc  $k$ -stable pour tout  $n$ , avec  $k = \log(2)$ . On vérifie que, avec les notations de la section 4.2.2 :

$$F_U = F_g^d \text{ et } F_U^{loc} = f_g^d$$

Posons maintenant :

$$V_{2^{-n}}(E) = \log \sum \{2^{-nqA(I)} : I \in \mathcal{X}_n \text{ et } A(I) \in E\}$$

Or,  $E \rightarrow \sum \{2^{-nqA(I)} : I \in \mathcal{X}_n \text{ et } A(I) \in E\}$  est croissante et sous-additive, donc  $V_{2^{-n}}$  est  $k$ -stable pour tout  $n$ , avec  $k = \log(2)$ .

De plus, on peut écrire  $V_{2^{-n}}$  sous la forme :

$$V_{2^{-n}}(E) = \log S^q(n, E).$$

Ainsi :

$$\tau^d(q) = -F_V(\mathbb{R}^+).$$

Pour plus de commodité, on définit :

$$\tau_R^d(q) = -F_V([0, R])$$

On va maintenant appliquer le lemme 4.5. Pour ceci, on remarque que :

$$N(n, E) \inf_{\alpha \in E} 2^{-nq\alpha} \leq \sum \{2^{-nqA(I)} : I \in \mathcal{X}_n \text{ et } A(I) \in E\} \leq N(n, E) \sup_{\alpha \in E} 2^{-nq\alpha}. \quad (4.14)$$

Posons  $g(\alpha) = -q\alpha$ . En passant au logarithme, les inégalités (4.14) peuvent s'écrire

$$U_{2^{-n}}(E) + \frac{\inf_{\alpha \in E} g(t)}{h(2^{-n})} \leq V_{2^{-n}}(E) \leq U_{2^{-n}}(E) + \frac{\sup_{\alpha \in E} g(t)}{h(2^{-n})}.$$

Le lemme 4.5 s'applique. En écrivant la relation (4.12) dans ce contexte, on trouve :

**Proposition 4.2.** *Pour toute fonction  $A : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  et  $q \in \mathbb{R}$ ,*

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha q - f_g^d(\alpha)\} = \lim_{R \rightarrow \infty} \tau_R^d(q). \quad (4.15)$$

On rappelle que, comme  $F_V$  est croissante,  $\lim_{R \rightarrow \infty} \tau_R^d(q) \geq \tau^d(q)$ . On cherche maintenant une condition pour avoir l'égalité entre ces deux termes. Elle est toujours vraie lorsque  $q > 0$  :

**Proposition 4.3.** *Pour toute fonction  $A : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  et pour tout  $q > 0$*

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha q - f_g^d(\alpha)\} = \tau^d(q). \quad (4.16)$$

*Preuve.* Pour tout entier naturel  $n$ , il existe  $2^n$  intervalles d'ordre  $n$ , donc pas plus de  $2^n$  intervalles  $I$  dyadiques d'ordre  $n$  tels que  $A(I) > R$ . Ceci permet d'écrire les inégalités

$$S^q(n) \leq S^q(n, [0, R]) + 2^n 2^{-qR}. \quad (4.17)$$

Pour toutes suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  de réels positifs,

$$\limsup \frac{\log(a_n + b_n)}{n} = \max\left\{\limsup \frac{\log a_n}{n}, \limsup \frac{\log b_n}{n}\right\}.$$

En posant  $a_n = S^q(n, [0, R])$  et  $b_n = 2^{n(1-qR)}$ , on en déduit :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log S^q(n)}{n \log 2} \leq \max\left\{\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log S^q(n, [0, R])}{n \log 2}, 1 - qR\right\}$$

et donc :

$$\min\{\tau_R^d(q), qR - 1\} \leq \tau^d(q)$$

pour tout  $R$ . Lorsque  $R$  tend vers  $+\infty$ , il en est de même de  $qR - 1$  (c'est ici qu'intervient l'hypothèse  $q > 0$ ), et donc  $\tau^d(q) = \lim_{R \rightarrow \infty} \tau_R^d(q)$ .  $\square$

Pour  $q \leq 0$  une hypothèse supplémentaire est nécessaire (voir la partie 4.3.5 pour un contre-exemple). Par exemple, le résultat est vrai si  $A(I)$  est bornée pour  $|I|$  assez petit :

**Proposition 4.4.** *Si il existe  $\eta > 0$  et  $M \in \mathbb{R}$  tel que pour tout  $I$  dyadique,  $|I| \leq \eta$  implique  $A(I) \leq M$  ou  $A(I) = +\infty$  alors pour tout  $q \in \mathbb{R}$  :*

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha q - f_g^d(\alpha)\} = \tau^d(q).$$

*Preuve.* Pour tout  $R \geq M$  :  $S^q(n, [0, R]) = S^q(n)$  dès que  $2^{-n} \leq \eta$ , donc  $\tau_R^d(q) = \tau^d(q)$ . Il suffit ensuite d'utiliser la proposition 4.2.  $\square$

Dans le cas contraire, on connaît la valeur de  $\tau^d(q)$  pour  $q < 0$  :

**Proposition 4.5.** *Si pour tous  $\eta > 0$  et  $M \in \mathbb{R}$  il existe un intervalle  $I$  dyadique tel que  $|I| \leq \eta$  et  $M < A(I) < +\infty$  alors pour tout  $q < 0$  :*

$$\tau^d(q) = -\infty.$$

*Preuve.* Pour tout  $M > 0$ , il existe une suite extraite  $I_{\sigma(n)}$  telle que  $M < A_{\sigma(n)} < +\infty$ . On en déduit que  $S^q(\sigma(n)) \geq 2^{-q\sigma(n)M}$ , donc que  $\frac{\log S^q(\sigma(n))}{-\sigma(n) \log 2} \leq qM$ . En prenant la  $\liminf$ ,  $\tau^d(q) \leq qM$ .  $\square$

Il existe des cas où  $A$  est non bornée au voisinage de  $|I| = 0$  et où  $\tau_R^d(q)$  ne tend pas vers  $-\infty$  pour  $q < 0$ . Nous donnons un exemple dans la partie suivante, dans le cadre continu.

Un cas particulier important est celui où  $A$  peut s'écrire sous la forme :  $A = \log \mu(I) / \log |I|$ , où  $\mu$  est une mesure positive. Remarquons que dans ce cas, par définition de  $\tau$ ,  $\tau^d(0) = -\dim_B(\text{support}(\mu))$ , où  $\dim_B$  désigne la dimension de boîte.

**Théorème 4.1.** *Si  $A(I) = \frac{\log \mu(I)}{\log |I|}$  où  $\mu$  est une mesure positive et non identiquement nulle, alors, pour tout  $q \neq 0$  :*

$$\tau^d(q) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \{q\alpha - f_g^d(\alpha)\}.$$

Pour montrer ce théorème, on a besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.1.** *Soit  $q < 0$ . Si pour tout  $r > 0$  il existe  $R_0 > 0$  vérifiant : pour tout  $N \in \mathbb{N}$  il existe  $n \geq N$  et  $I \in \mathcal{X}_n$  tel que  $A(I) \in [r, R_0]$  alors :*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \tau_R^d(q) = -\infty$$

*Preuve.* Pour tout  $R > R_0$ , pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , il existe  $n \geq N$  et  $I \in \mathcal{X}_n$  tel que  $A(I) \in [r, R]$ . On en déduit :  $S^q(n, [0, R]) \geq 2^{-nqr}$ , donc :

$$\frac{\log S^q(n, [0, R])}{-n \log 2} \leq qr$$

En passant à la  $\liminf$  sur  $n$ , il vient :

$$\tau_R^d(q) \leq qr.$$

On en déduit le résultat.  $\square$

*Preuve du théorème 4.1.* D'après les propositions 4.2, 4.4 et 4.5, il s'agit de montrer que, lorsque  $A$  n'est pas bornée au voisinage de 0, on a, pour tout  $q < 0$  :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \tau_R^d(q) = -\infty.$$

Supposons  $A$  non bornée au voisinage de  $|I| = 0$  : pour tout  $\eta > 0$  et  $M \in \mathbb{R}$  il existe  $I$  dyadique,  $|I| \leq \eta$  tel que  $M < A(I) < +\infty$ .

On va montrer par l'absurde que les hypothèses du lemme 4.1 sont alors vérifiées. Supposons le contraire : il existe  $r > 0$  tel que, pour tout  $R_0 > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$  et tout  $I \in \mathcal{X}_n$  :  $A(I) \notin [r, R_0]$ , ce qui implique :

$$\mu(I) \leq 2^{-nR_0} \text{ ou } \mu(I) \geq 2^{-nr} \quad (4.18)$$

Choisissons  $R_0 = \max(2r, 2)$ . Comme  $A$  n'est pas bornée au voisinage de  $|I| = 0$ , il existe  $|I|$  dyadique d'ordre  $n \geq 2$  tel que  $R_0 < A(I) < +\infty$ , c'est à dire  $0 < \mu(I) \leq 2^{-nR_0}$ .

On peut diviser  $I$  en deux intervalles dyadiques  $I_1$  et  $I_2$  d'ordre  $n+1$ . Comme  $I_1 \subset I$ ,  $\mu(I_1) \leq \mu(I)$ , donc  $\mu(I_1) \leq 2^{-nR_0}$ . Or,  $R_0.n > r.(n+1)$  donc  $\mu(I_1) < 2^{-(n+1)r}$ . On en déduit d'après (4.18) :  $\mu(I_1) \leq 2^{-(n+1)R_0}$ . De même,  $\mu(I_2) \leq 2^{-(n+1)R_0}$ .

Par une récurrence immédiate, on en déduit que pour tout intervalle  $J$  dyadique d'ordre  $n+m$  avec  $m \geq 0$  inclus dans  $I$  :  $\mu(J) \leq 2^{-(n+m)R_0}$ . Ainsi,  $\mu(I) \leq 2^{m-(n+m)R_0}$ . Comme  $R_0 > 1$ , on obtient en faisant tendre  $m$  vers l'infini :  $\mu(I) = 0$ , ce qui est contradictoire.  $\square$

Le cas  $q = 0$  semble plus difficile à cerner. Si on suppose de plus  $\mu$  absolument continue, on a le résultat suivant :

**Proposition 4.6.** *Si  $A(I) = \frac{\log \mu(I)}{\log |I|}$  où  $\mu$  est une mesure absolument continue, positive et non identiquement nulle, alors :*

$$\tau^d(0) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \{-f_g^d(\alpha)\} = -1.$$

Ainsi, pour tout  $q \in \mathbb{R}$  :

$$\tau^d(q) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \{q\alpha - f_g^d(\alpha)\}.$$

*Preuve.* Commençons par calculer la valeur de  $\tau^d(0)$  :

Par définition,  $\tau^d(0) = -\dim(\text{support}(\mu))$ . Comme  $\mu$  est absolument continue et non identiquement nulle,  $\tau^d(0) = -1$ .

Calculons maintenant la limite de  $\tau_R(0)$  quand  $R$  tend vers l'infini.

$\mu$  est absolument continue et positive, donc il existe une fonction intégrable et positive telle que  $\mu(I) = \int_I f(x)dx$ .  $\mu$  est non identiquement nulle, donc il existe  $\epsilon > 0$  et un borélien  $B$  borné et de mesure non nulle tel que  $f(x) \geq \epsilon \cdot 1_{x \in B}$ . Posons

$$\nu(I) = \epsilon \int_I 1_{x \in B} dx$$

Comme  $\nu \leq \mu$ , pour tout intervalle  $I$  de diamètre inférieur à 1, on en déduit que

$$A(I) \leq \frac{\log \nu(I)}{\log |I|}.$$

Posons

$$u_n = \# \left\{ I \in \mathcal{X}_n : \nu(I) \geq 2^{-n} \frac{\epsilon |B|}{2} \right\}.$$

On sait que  $\epsilon |B| = \sum \{\nu(I) : I \in \mathcal{X}_n\}$ . Comme pour tout  $I \in \mathcal{X}_n$ ,  $\nu(I) \leq 2^{-n} \epsilon$ , on en déduit :  $\epsilon |B| \leq 2^{-n} \epsilon u_n + \frac{1}{2} 2^{-n} \epsilon |B| (2^n - u_n)$  donc :

$$u_n \geq 2^n K$$

où  $K = |B|/2$  est strictement positif.

On en déduit que  $\# \left\{ I \in \mathcal{X}_n : A(I) \leq 1 + \frac{\log \frac{\epsilon |B|}{2}}{-n \log 2} \right\} \geq 2^n K$ . Lorsque  $n$  est assez grand pour avoir  $\frac{\log \frac{\epsilon |B|}{2}}{-n \log 2} \leq 1$  :  $\# \{I \in \mathcal{X}_n : A(I) \in [0, 2]\} \geq 2^n K$  donc :

$$S^0(n, [0, 2]) \geq 2^n K$$

En passant au logarithme et en prenant la  $\liminf$ , on en déduit :  $\tau_2^d(0) \leq -1$ . On conclut en rappelant que  $R \rightarrow \tau_R^d(0)$  est décroissante et de limite supérieure à  $-1$ .

La deuxième partie de la proposition s'obtient avec la proposition 4.3.  $\square$

#### 4.3.4 Formalisme multifractal continu

##### Définitions

**Spectre de grande déviations continu** Le spectre de grandes déviations continu a été introduit dans [LTar]. Il permet de s'affranchir du découpage en intervalles dyadiques. Au lieu de se restreindre à ces intervalles, on considère tous les ensembles de longueur  $\eta$ . Le spectre de grandes déviations continu s'intéresse au comportement asymptotique quand  $\eta$  tend vers 0 de la densité de la réunion des intervalles de longueur  $\eta$  ayant un exposant de Hölder de grain proche d'une valeur donnée.

De même que précédemment, on se place dans un cadre plus général en remplaçant l'exposant de grain par une fonction d'intervalles  $A$  sur laquelle aucune hypothèse n'est faite.

On remplace donc les ensembles  $\mathcal{X}_n$  par les ensembles  $\mathcal{R}_\eta$  définis pour  $\eta \in (0, 1)$  par :

$$\mathcal{R}_\eta = \{I \in \mathcal{X} : |I| = \eta\}.$$

On rappelle que, pour tout ensemble d'intervalles  $\mathcal{T}$ , on note :  $\cup \mathcal{T} = \cup \{I : I \in \mathcal{T}\}$ .

Pour tout sous-ensemble  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{R}_\eta$  et pour tout  $t \in \cup \mathcal{T}$ , le plus grand intervalle contenant  $t$  et inclus dans  $\cup \mathcal{T}$  est de longueur supérieure à  $\eta$ . De plus, ces intervalles sont disjoints, donc ils sont en nombre fini. On en déduit que  $\cup \mathcal{T}$  est mesurable.

On peut donc définir l'équivalent de  $N(\eta, E)$  :

$$N^c(\eta, E) = \frac{1}{\eta} |\cup \{I \in \mathcal{R}_\eta : A(I) \in E\}|$$

De manière analogue à ce qui précède, on cherche à caractériser le comportement de  $N^c(\eta, E)$  quand  $\eta \rightarrow 0$  : on considère

$$F_g^c(E) = \limsup_{\eta \rightarrow 0} \frac{\log N^c(\eta, E)}{-\log \eta}$$

Le spectre de grandes déviations continu de  $A$  est défini par :

$$f_g^c(\alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_g^c([\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]).$$

En résumé, si la réunion des intervalles  $I$  de longueur  $\eta$  pour lesquels  $A(I)$  se situe dans  $[\alpha_0 - \epsilon, \alpha_0 + \epsilon]$  est de mesure proportionnelle à  $\eta \cdot \eta^{-r \cdot n}$  pour tout  $\epsilon$ , alors  $f_g^d(\alpha_0) = r$ .

### Spectre de Legendre continu

Il faut adapter les quantités  $S^q$  précédentes au cas continu. Cette généralisation a été effectuée dans [LTar].

On utilise la notion d'*empilement* : la famille  $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$  est un empilement de  $[0, 1]$  si les intervalles de  $\mathcal{R}$  ont leurs intérieurs disjoints deux à deux. Pour tout  $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$  on pose alors

$$H^q(\mathcal{R}) = \sup \left\{ \sum \{|u|^{qA(u)} : u \in \mathcal{R}' \text{ et } A(u) < +\infty\} : \right. \\ \left. \mathcal{R}' \text{ est un empilement de } [0, 1] \text{ tiré de } \mathcal{R} \right\} \quad (4.19)$$

avec les conventions :  $|u|^{+\infty} = 0$ ,  $|u|^{-\infty} = +\infty$ ,  $H^q(\emptyset) = 0$ .

Ensuite

$$\tau^c(q) = \liminf_{\eta \rightarrow 0} \frac{\log H^q(\mathcal{R}_\eta)}{\log \eta}.$$

Le spectre de Legendre continu associé à  $A$  est la transformée de Legendre de  $\tau^c$  :

$$L_c(\alpha) = \sup_{q \in \mathbb{R}} \{q\alpha - \tau^c(q)\}.$$

Remarquons que, si  $\mathcal{R}$  est un empilement, l'expression  $H^q(\mathcal{R})$  s'écrit simplement

$$H^q(\mathcal{R}) = \sum \{|u|^{qA(u)} : u \in \mathcal{R} \text{ et } A(u) < +\infty\}.$$

Ainsi, on peut vérifier que  $H^q$  généralise bien  $S^q$ . En effet,  $\mathcal{X}_n$  est un empilement, donc

$$H^q(\mathcal{X}_n) = \sum \{|u|^{qA(u)} : u \in \mathcal{X}_n \text{ et } A(u) < +\infty\} = S^q(n).$$



### 4.3.5 Application de la section 4.2.2

Les résultats de la section 4.2.2 s'appliquent aux grandeurs définies dans la section 4.3.3 dans un cadre continu grâce aux transpositions suivantes de notations :

$$L = (0, 1]$$

$$h(\eta) = 1/|\log \eta|$$

$$U_\eta(E) = \log N^c(\eta, E)$$

On remarque que, pour tous  $E_1, E_2$  disjoints,  $N^c(\eta, E_1 \cup E_2) = N^c(E_1) \cup N^c(E_2)$ . On en déduit que  $E \rightarrow N^c(\eta, E)$  est croissante et sous-additive. Ainsi,  $U_\eta$  est  $k$ -stable avec  $k = \log 2$  pour tout  $\eta$ .

On vérifie que, avec les notations de la section 4.2.2 :

$$F_U = F_g^c \text{ et } F_U^{loc} = f_g^c$$

Posons maintenant :

$$V_\eta(E) = \log H^q(\mathcal{R}_\eta \cap A^{-1}(E))$$

où  $H^q$  est défini section 4.3.4. On remarque que, pour tous  $E_1, E_2$  disjoints,  $H^q(\mathcal{R}_\eta \cap A^{-1}(E_1 \cup E_2)) = H^q(\mathcal{R}_\eta \cap A^{-1}(E_1)) + H^q(\mathcal{R}_\eta \cap A^{-1}(E_2))$ . On en déduit que  $E \rightarrow H^q(\mathcal{R}_\eta \cap A^{-1}(E))$  est croissante et sous-additive.

Ainsi,  $V_\eta$  est  $k$ -stable avec  $k = \log 2$ . De plus,

$$\tau^c(q) = -F_V(\mathbb{R}^+).$$

On pose également, pour plus de facilité :

$$\tau_R^c(q) = -F_V([0, R]) = \liminf_{\eta \rightarrow 0} \frac{\log H^q(\mathcal{R}_\eta \cap A^{-1}([0, R]))}{\log \eta}.$$

On va maintenant appliquer le lemme 4.5. Pour ceci, va utiliser le résultat suivant, démontré dans [LTar] et dont on rappelle la preuve : pour tout  $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  :

$$\frac{1}{2}N^c(\eta, E) \inf_{\alpha \in E} \eta^{q\alpha} \leq H^q(\mathcal{R}_\eta \cap A^{-1}(E)) \leq N^c(\eta, E) \sup_{\alpha \in E} \eta^{q\alpha} \quad (4.20)$$

*Preuve.* Pour la démonstration, on pose  $\mathcal{T} = \mathcal{R}_\eta \cap A^{-1}(E)$ .

Commençons par l'inégalité de droite. Soit  $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Pour tout empilement  $\mathcal{R}$  tiré de  $\mathcal{T}$ , on peut écrire :

$$\sum \{\eta^{qA(u)} : u \in \mathcal{R}\} \leq \sup_{u \in \mathcal{R}} \{\eta^{qA(u)}\} \# \mathcal{R}$$

Or,  $\# \mathcal{R} \leq \eta^{-1} |\cup \mathcal{T}| \leq N^c(\eta, E)$  et pour tout  $u \in \mathcal{R}$ ,  $A(u) \in E$  donc

$$\sup_{u \in \mathcal{R}} \{\eta^{qA(u)}\} \leq \sup_{\alpha \in E} \eta^{q\alpha}.$$

On a bien l'inégalité de droite.

$\cup \mathcal{T}$  est une réunion d'intervalles de longueurs égales, donc on peut écrire  $\cup \mathcal{T}$  sous la forme :  $\cup \mathcal{T} = \cup_{k=1}^n J_k$  où les  $J_k$  sont fermés, non vides et disjoints.

Pour tout  $J_k$ , on montre ci-dessous qu'on peut extraire de  $\mathcal{T}$  un empilement  $\mathcal{R}_k$  tel que  $\eta \# \mathcal{R}_k \geq |J_k|/2$  et  $\cup \mathcal{R}_k \subset J_k$ .

En effet, soit  $p$  tel que  $|J_k| \in (2p\eta, 2(p+1)\eta]$ . On choisit  $a_0 \dots a_p$  dans  $J_k$  tels que  $a_q > a_{q-1} + 2\eta$  pour  $1 \leq q \leq p$ . On sait que, pour  $0 \leq q \leq p$ , il existe un intervalle  $L_q \in \mathcal{T}$  tel que  $a_q \in L_q$ . On vérifie que les  $L_q$  sont disjoints et inclus dans  $J_k$ . On pose  $\mathcal{R}_k = \{L_q, q = 0..p\}$ . Comme  $\# \mathcal{R}_k = (p+1)$ , on a bien  $\eta \# \mathcal{R}_k \geq |J_k|/2$ . De plus,  $\cup \mathcal{R}_k \subset J_k$ .

Il suffit maintenant de considérer la réunion  $\mathcal{R}$  des  $\mathcal{R}_k$  pour  $k = 1..n$  et de constater que  $\mathcal{R}$  est un empilement de  $[0, 1]$  tiré de  $\mathcal{T}$  de cardinal plus grand que  $|\mathcal{T}|/2\eta$ . Comme :

$$\inf_{u \in \mathcal{R}} \{\eta^{qA(u)}\} \# \mathcal{R} \leq \sum \{\eta^{qA(u)} : u \in \mathcal{R}\}$$

on en déduit :

$$\frac{1}{2} \frac{|\mathcal{T}|}{\eta} \inf_{u \in \mathcal{R}} \{\eta^{qA(u)}\} \leq \sum \{\eta^{qA(u)} : u \in \mathcal{R}\}$$

□

Posons  $g(\alpha) = -q\alpha$ . En passant au logarithme, les inégalités (4.20) s'écrivent :

$$-\ln(2) + U_\eta(E) + \frac{\inf_{\alpha \in E} g(t)}{h(\eta)} \leq V_\eta(E) \leq U_\eta(E) + \frac{\sup_{\alpha \in E} g(t)}{h(\eta)}.$$

Le lemme 4.5 s'applique. En écrivant la relation (4.12) dans ce contexte, on trouve

**Proposition 4.7.** *Pour toute fonction  $A : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  et pour tout  $q \in \mathbb{R}$ ,*

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha q - f_g^c(\alpha)\} = \lim_{R \rightarrow \infty} \tau_R^c(q). \quad (4.21)$$

On rappelle que, comme  $F_V$  est croissante,  $\lim_{R \rightarrow \infty} \tau_R^c(q) \leq \tau^c(q)$ . On cherche maintenant une condition pour avoir l'égalité entre ces deux termes. Elle est toujours vraie lorsque  $q > 0$  :

**Proposition 4.8.** *Pour toute fonction  $A : \mathcal{X} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  et pour tout  $q > 0$*

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha q - f_g^c(\alpha)\} = \tau^d(q). \quad (4.22)$$

*Preuve.* Pour tout  $\eta > 0$ , et pour tout empilement  $\mathcal{R}$  tiré de  $\mathcal{R}_\eta$ ,  $\sharp \mathcal{R} \leq \eta^{-1}$ . Ceci permet d'écrire les inégalités

$$H^q(\mathcal{R}) \leq H^q(\mathcal{R}_\eta \cap A^{-1}([0, R])) + 2^n 2^{-qR}. \quad (4.23)$$

On en déduit, en passant au logarithme, en divisant par  $\log \eta$  et en prenant la  $\limsup$  quand  $\eta \rightarrow 0$  :

$$\min\{\tau_R^c(q), qR - 1\} \leq \tau^c(q)$$

pour tout  $R$ . Lorsque  $R$  tend vers  $+\infty$  il en est de même de  $qR - 1$  (c'est ici qu'intervient l'hypothèse  $q > 0$ ), et donc  $\tau^c(q) = \lim_{R \rightarrow \infty} \tau_R^c(q)$ .  $\square$

On doit faire des hypothèses sur  $A$  pour que la relation (4.22) soit vérifiée pour tout  $q$ . On peut par exemple supposer  $A$  borné pour  $|I|$  suffisamment petit :

**Proposition 4.9.** *S'il existe  $\eta_0 > 0$  tel que  $\sup\{A(I) : |I| \leq \eta_0\} < +\infty$  alors*

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha q - f_g^c(\alpha)\} = \tau(q) \text{ pour tout } q.$$

C'est le résultat correspondant à la proposition 4.4.

Dans le cas contraire, on connaît la valeur de  $\tau^c(q)$  pour  $q < 0$  :

**Proposition 4.10.** *Si pour tous  $\eta > 0$  et  $M \in \mathbb{R}$  il existe un intervalle  $I$  tel que  $|I| \leq \eta$  et  $A(I) > M$  alors pour tout  $q < 0$  :*

$$\tau^c(q) = -\infty.$$

*Preuve.* Pour tout  $M > 0$ , il existe une suite  $I_n$  telle que  $A(I_n) > M$  et  $|I_n| \rightarrow 0$ . On en déduit que  $H^q(\mathcal{R}_{|I_n|}) \geq 2^{-qnM}$ , donc que  $\frac{\log H^q(\mathcal{R}_{|I_n|})}{-\log |I_n|} \leq qM$ . En prenant la  $\liminf$ ,  $\tau^d(q) \leq qM$ .  $\square$

Il existe des cas où  $A$  n'est pas borné pour  $|I|$  suffisamment petit et où  $\lim_{R \rightarrow \infty} \tau_R^c(q) \neq -\infty$ , avec  $q < 0$ .

**Exemple** On définit une fonction  $A$  sur tous les intervalles fermés de longueur non nulle de  $[0, 1]$  par

$$A([a, b]) = \begin{cases} 1 & \text{si } a > 0 \\ 1/(b - a) & \text{si } a = 0. \end{cases}$$

Soit  $q \in \mathbb{R}$ . Soit  $R > 1$ , fixé.

Pour tout  $\eta < 1/R$ , pour tout intervalle  $I$  de longueur  $\eta$  :  $A(I) \in [0, R]$  si et seulement si  $0 \notin I$ . Dans ce cas,  $A(I) = 1$ .

Un empilement d'intervalles de longueur  $\eta$  comporte au plus  $\eta^{-1}$  intervalles. On en déduit que

$$H^q(\mathcal{R}_\eta \cap A^{-1}([0, R])) \leq \eta^{q-1}.$$

Par ailleurs, l'empilement d'intervalles  $\{[k\eta, (k+1)\eta] : k = 1.. \lfloor \eta^{-1} \rfloor - 1\}$  est un empilement d'intervalles de  $[0, 1]$ , de cardinal  $\lfloor \eta^{-1} \rfloor - 1$  ne contenant pas 0. On en déduit :

$$(\lfloor \eta^{-1} \rfloor - 1)\eta^q \leq H^q(\mathcal{R}_\eta \cap A^{-1}([0, R]))$$

Finalement :

$$\tau_R^c(q) = q - 1.$$

La suite  $A([0, 1/n])$  tend vers  $+\infty$  donc, d'après la proposition 4.10, pour tout  $q < 0$  :

$$\tau^c(q) = -\infty.$$

C'est donc un cas où l'égalité (4.22) n'est pas vérifiée pour tout  $q$ .

En remarquant que la suite  $A([0, 2^{-n}])$  tend vers  $+\infty$  et d'après la proposition 4.5, on a dans cet exemple :  $\tau^d(q) = -\infty$ . Or,  $\tau_d^R(q) \geq \tau_c^R(q) \geq q - 1$ , donc c'est également un cas où l'égalité (4.16) n'est pas vérifiée pour tout  $q$ .

Si on fait des hypothèses usuelles sur la forme de  $A$ , on peut aboutir à des résultats intéressants.

**Proposition 4.11.** *Si  $A(I) = \frac{\log \mu(I)}{\log |I|}$  où  $\mu$  est une mesure positive, alors*

$$\inf_{\alpha \in \mathbb{R}} \{\alpha q - f_g^c(\alpha)\} = \tau(q) \text{ pour tout } q \neq 0.$$

*Preuve.* Si les hypothèses de la proposition 4.8 ou de la proposition 4.9 sont vérifiées, on a l'égalité voulue.

Il reste à traiter le cas "problématique" :  $q < 0$  et pour tout  $\eta_0 > 0$  :

$$\sup\{A(I) : |I| \leq \eta_0\} = +\infty.$$

On a vu (proposition 4.10) que, dans ce cas,  $\tau^c(q) = -\infty$ . Il faut donc montrer que  $\lim_R \tau_R^c(q) = -\infty$ .

On obtient ce résultat par le théorème 4.1, en remarquant que  $\tau_R^c(q) \leq \tau_R^d(q)$ .

□

## 4.4 Application au spectre microlocal : formalisme 2-microlocal

Certains résultats de la partie 3 à propos du spectre 2-microlocal en temps peuvent être retrouvés avec les notions de ce chapitre, mais ils ne sont pas développés ici. On préfère s'intéresser au spectre 2-microlocal en ondelettes.

### 4.4.1 Formalisme 2-microlocal continu

#### Notations

Le formalisme 2-microlocal continu, introduit dans [LS04] se fonde sur la caractérisation des espaces 2-microlocaux par des ondelettes continues du théorème 2.6.

On suppose fixée une ondelette  $\psi$  admissible avec  $N$  moments nuls et ses  $r$  premières dérivées à croissance rapide, ainsi qu'un réel  $x_0$ .

Alors, d'après le théorème 2.6 pour tout couple  $(\sigma, s') \in \mathbb{R}^2$  tel que  $r + \sigma - s' + \inf(s', 1) > 0$  et  $N > \max(\sigma - s', \sigma)$ ,  $f \in C_{x_0}^{\sigma-s', s'}$  équivaut à :

$$\forall a > 0, |b| < 1 : |\langle f, a^{-1/2} \psi_{(a, b+x_0)} \rangle| \leq C a^{\sigma-s'} \left(1 + \frac{|b|}{a}\right)^{-s'} \quad (4.24)$$

En passant au logarithme, en divisant par  $\log a$  et en prenant la  $\liminf$  quand  $(a, b - x_0)$  tend vers 0, on en déduit que pour tout couple  $(\sigma, s') \in \mathbb{R}^2$  tel que  $r + s + \inf(s', 1) > 0$  et  $N > \max(s, s + s')$  :  $f \in C_{x_0}^{\sigma-s', s'}$  équivaut à :

$$\sigma \leq \liminf_{(a,b) \rightarrow 0} \frac{s' \log(a + |b|) + \log |\langle f, a^{-1/2} \psi_{(a, b+x_0)} \rangle|}{\log a}$$

On en déduit que, si  $r + \sigma(s') - s' + \inf(s', 1) > 0$  et  $N > \max(\sigma(s') - s', \sigma)$ , alors

$$\sigma(s') = \liminf_{(a,b) \rightarrow 0} \frac{s' \log(a + |b|) + \log |\langle f, a^{-1/2} \psi_{(a, b+x_0)} \rangle|}{\log a}. \quad (4.25)$$

où  $\sigma$  est la frontière 2-microlocale de  $f$  en  $x_0$  (voir définition 2.3).

En toute rigueur, il faudrait définir, de manière analogue à la partie 3  $\sigma_\psi(s')$  égale au membre de droite de l'équation (4.25) et remarquer que  $\sigma_\psi$  et  $\sigma$  coïncident sur un certain sous-ensemble du plan. Néanmoins, on va supposer que  $\psi$  est suffisamment régulière (c'est à dire que  $r$  et  $N$  sont assez grands) pour que, pour tous les  $s'$  qui nous intéressent, l'équation (4.25) soit vérifiée.

On voit apparaître une expression analogue à (3.9). On pose donc pour des raisons analogues :

$$\chi(\rho, \epsilon) = \liminf_{(a,b) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log |\langle f, a^{-1/2} \psi_{(a, b+x_0)} \rangle|}{\log a} : (a, b) \in D^w(\rho, \epsilon) \right\}$$

où

$$D^w(\rho, \epsilon) = \{(a, b) \in (-1, 1)^2, \text{ tels que } a^{\rho+\epsilon} \leq \max(a, |b|) \leq a^{\rho-\epsilon}\}.$$

Pour  $\epsilon$  assez petit on peut expliciter l'ensemble  $D^w(\rho, \epsilon)$  de la manière suivante :

- Si  $\rho \in (0, 1)$  :  $(a, b) \in D^w(\rho, \epsilon) \iff a^{\rho+\epsilon} \leq |b| \leq a^{\rho-\epsilon}$
- Si  $\rho = 0$  :  $(a, b) \in D^w(\rho, \epsilon) \iff a^{\rho+\epsilon} \leq |b|$
- Si  $\rho = 1$  :  $(a, b) \in D^w(\rho, \epsilon) \iff |b| \leq a^{\rho-\epsilon}$

Remarquons que les  $D^w(\rho, \epsilon)$  sont les mêmes ensembles que les  $D(\rho, \epsilon)$  de la définition 3.12, sauf dans le cas où  $\rho + \epsilon \geq 1$ . En effet, il est nécessaire avec la caractérisation en ondelettes de prendre en compte le cône d'influence  $|b| \leq a$ , alors que ce n'était pas nécessaire avec la caractérisation en temps.

Le *spectre 2-microlocal* de  $f$  en  $x_0$  est défini par

$$\chi(\rho) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi(\rho, \epsilon).$$

Pour pouvoir appliquer simplement les résultats des sections précédentes, on définit une version "localisée" des  $D^w(\rho, \epsilon)$ . En faisant  $\epsilon = 0$  on trouve

$$d(\rho) = \{(a, b) \in (0, 1)^2 / |b|^\rho = \max(a, |b|)\}.$$

Lorsque  $\rho \in (0, 1)$ ,

$$d(\rho) = (-1, 0] \times \{0\} \cup \{(a, a^{1/\rho}) / a \in (0, 1)\}$$

est le graphe d'une fonction continue.

On définit ensuite, pour  $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ , le sous-ensemble  $D_E$  de  $(0, 1] \times \mathbb{R}$

$$D_E = \bigcup_{\rho \in E} d(\rho). \quad (4.26)$$

Il est facile de vérifier que  $D_{[\rho-\epsilon, \rho+\epsilon]} = D^w(\rho, \epsilon)$ .

Remarquons enfin que  $\chi(\rho, \epsilon)$  peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\chi(\rho, \epsilon) = \liminf_{\substack{(a,b) \rightarrow 0 \\ a > 0 \quad b \in \mathbb{R}}} \frac{\log \left( \left| \langle f, a^{-1/2} \psi_{(a,b+x_0)} \rangle \right| \cdot 1_{(a,b) \in D^w(\rho, \epsilon)} \right)}{\log a},$$

avec la convention  $\log 0 = -\infty$ .

Le résultat suivant sera utile par la suite :

**Proposition 4.12.**  $\forall s' \in \mathbb{R}, \forall \rho \in [0, 1], \forall (a, b) \in D^w(\rho, \epsilon) \cap (0, 1] \times [-1, 1] :$

$$2^{-|s'|} a^{\epsilon|s'| + \rho s'} \leq (a + |b|)^{s'} \leq 2^{|s'|} a^{-\epsilon|s'| + \rho s'}$$

*Preuve.* Pour tout  $(a, b) \in D^w(\rho, \epsilon)$  :

$$a^{\rho+\epsilon} \leq \max(a, |b|) \leq a + |b| \leq 2 \max(a, |b|) \leq 2a^{\rho-\epsilon}.$$

En élevant à la puissance  $s'$  les inégalités  $a^{\rho+\epsilon} \leq a + |b| \leq 2a^{\rho-\epsilon}$  on obtient le résultat. □

### Application de la partie 4.2.2

Les considérations de la partie 4.2.2 s'appliquent, avec :

$$L = (0, 1] \times \mathbb{R}$$

$$t = (a, b)$$

$$h(a, b) = \frac{1}{|\log a|}$$

$$U((a, b), E) = \log(|\langle f, a^{-1/2} \psi_{(a, b+x_0)} \rangle| \cdot 1_{(a, b) \in D_E})$$

$$V((a, b), E) = \log(|\langle f, a^{-1/2} \psi_{(a, b+x_0)} \rangle| \cdot (a + |b|)^{s'} \cdot 1_{(a, b) \in D_E})$$

Les fonctions  $U$  et  $V$  sont stables.  $F_U([\rho - \epsilon, \rho + \epsilon])$  correspond à  $-\chi_\epsilon(\rho)$ , et  $F_U^{loc}(\rho)$  à  $-\chi(\rho)$ . De plus  $F_V([0, 1]) = F_V(\mathbb{R}) = -\sigma(s')$ .

Posons  $g(t) = -s't$ . La proposition 4.12 peut s'écrire de la manière suivante :  $\forall (a, b) \in (0, 1] \times [-1, 1]$  :

$$-s' + U(a, b, I) + \frac{m(g, I)}{h(t)} \leq V(a, b, I) \leq s' + U(a, b, I) + \frac{M(g, I)}{h(t)}.$$

Ceci nous permet d'affirmer que  $U$  et  $V$  vérifient la condition (4.9) , avec  $g(\rho) = -\rho s'$ . On peut donc écrire l'égalité 4.12 dans ce contexte, en remarquant que  $\chi(\rho)$  vaut  $+\infty$  si  $\rho \notin [0, 1]$  et que  $-\sigma(s') = F_V([0, 1]) = \lim_{R \rightarrow \infty} F_V([-R, R])$  :

$$\max_{\rho \in [0, 1]} \{-\chi(\rho) - \rho s'\} = -\sigma(s')$$

Finalement, on aboutit au résultat suivant :



**Proposition 4.13.** *Pour tout  $s' \in \mathbb{R}$  :*

$$\sigma(s') = \min_{\rho \in [0,1]} \{\chi(\rho) + \rho s'\}.$$

C'est le formalisme 2-microlocal en ondelettes, exposé dans [LS04].

## 4.4.2 Formalisme 2-microlocal discret

### Formalisme classique

Le formalisme 2-microlocal discret se fonde sur le théorème 2.7. De même que précédemment, on suppose  $\psi$  suffisamment régulière pour que, pour toutes les valeurs de  $s'$  qui nous intéressent :

$$\sigma(s') = \liminf_{(2^{-j}, k2^{-j} - x_0) \rightarrow 0} \frac{\log_2(|\langle f, 2^{-j/2} \psi_{jk} \rangle| \cdot (2^{-j} + |k2^{-j} - x_0|)^{s'})}{-j}. \quad (4.27)$$

Pour avoir une expression plus proche de (4.25), on pose :

$$L_d(x_0) = \{2^{-j}, k2^{-j} - x_0, j > 0, k \in \mathbb{Z}\}$$

L'équation (4.27) se réécrit :

$$\sigma(s') = \liminf_{(a,b) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log(|\langle f, a^{1/2} \psi_{(a,b+x_0)} \rangle| \cdot (a + |b - x_0|)^{s'})}{\log a} : (a,b) \in L_d(x_0) \right\}. \quad (4.28)$$

On définit comme précédemment :

$$\chi^d(\rho, \epsilon) = \liminf_{\substack{(a,b) \rightarrow 0 \\ (a,b) \in L_d(x_0)}} \frac{\log(|\langle f, a^{1/2} \psi_{(a,b+x_0)} \rangle| \cdot 1_{(a,b) \in D_{[\rho-\epsilon, \rho+\epsilon]}})}{\log a},$$

puis

$$\chi^d(\rho) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi^d(\rho, \epsilon)$$

Par rapport au spectre 2-microlocal continu, le spectre 2-microlocal discret est moins stable, puisqu'il fait appel dans son calcul à moins de coefficients d'ondelettes. Cependant, il peut être facilement prescrit, puisque les  $\langle f, \psi_{jk} \rangle$  peuvent être choisis comme on le souhaite. Le spectre 2-microlocal continu serait donc

mieux adapté à l'évaluation de la frontière d'un signal en un point, tandis que le spectre 2-microlocal discret serait adapté aux situations où l'on souhaite obtenir une certaine frontière 2-microlocale (ce sera par exemple le cas en débruitage).

### Application de la partie 4.2.2

De même que pour le spectre continu, les considérations de la partie 4.2.2 s'appliquent. Les mêmes transpositions de notations peuvent être appliquées, à ceci près que  $L = L_d(x_0)$ . On aboutit donc au résultat suivant :

**Proposition 4.14.** *Pour tout  $s' \in \mathbb{R}$  :*

$$\sigma^d(s') = \min_{\rho \in [0,1]} \{\chi^d(\rho) + \rho s'\}.$$

## 4.5 Prescription des spectres

On s'intéresse à la prescription des spectres dans un cadre discret. Le spectre 2-microlocal et le spectre multifractal peuvent tous deux se mettre sous la forme étudiée dans la partie 4.2.2 :  $F_U(E) = \limsup_{t \rightarrow 0} h(t)U(t, E)$ . Les démonstrations de la prescription de chaque spectre partagent donc des points communs. Cependant, les contraintes pesant sur la fonction  $U$  ne sont pas les mêmes dans les deux cas.

### 4.5.1 Cadre général

Dans cette partie, on donne un résultat qui sera utile à la fois pour la prescription du spectre multifractal et du spectre 2-microlocal.

Pour pouvoir l'écrire de manière suffisamment générale, on utilise sur  $\overline{\mathbb{R}}$  la distance :  $d_{\overline{\mathbb{R}}}(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$  avec la convention  $\arctan(\pm\infty) = \pm\pi/2$ . Remarquons que  $d_{\overline{\mathbb{R}}}$  et la distance usuelle sont topologiquement équivalentes sur  $\mathbb{R}$ . Une autre remarque utile est que  $d_{\overline{\mathbb{R}}}(x, y) \leq |x - y|$ .

Heuristiquement, on se donne une suite  $I_n$  d'intervalles qui "tourne" sur  $I$ , et dont le diamètre tend vers 0. Sur chaque  $I_n$ , on approxime  $g$  par son maximum sur  $I_n$  (ce qui est possible car  $g$  est semi-continue supérieurement).

Si on se fixe un intervalle  $[\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ , l'hypothèse (4.29) permet de s'assurer qu'on a une suite extraite de  $(I_n)_n$  d'intervalles contenus dans  $[\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$  pour

laquelle  $x_n V_n(I_n)$  sera plus grand que  $g(\alpha)$ , ce qui permet d'avoir  $F^{loc}(\alpha) \geq g(\alpha)$ .

Dans le sens inverse, il faut s'assurer que  $F$  n'est pas perturbée par les valeurs de  $V_n$  sur les autres intervalles que  $I_n$ . C'est le but de l'hypothèse (4.30) : on peut choisir  $n_0$  tel que  $I_{n_0} \subset [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$  et l'hypothèse (4.30) permet de dire que, lorsque  $n \rightarrow \infty$  :  $x_n V_n(I_{n_0})$  va être plus petit que  $M(g, [\alpha - 2\epsilon, \alpha + 2\epsilon])$ .

**Lemme 4.6.** *Soit  $g$  une fonction semi-continue supérieurement sur un intervalle  $I$ .*

*Soit  $(x_n)_n$  une suite positive de limite nulle et  $V_n$   $k$ -stable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .*

*Soit  $F$  définie pour  $E \subset I$  par :  $F(E) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot V_n(E)$ .*

*Soit une suite  $(I_n)_n$  d'intervalles ouverts vérifiant :*

$$\begin{cases} \forall N \in \mathbb{N} : I \subset \cup_{n \geq N} I_n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0 \end{cases}$$

*Si :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_{\overline{\mathbb{R}}}(x_n V_n(I_n), M(g, I \cap I_n)) = 0 \quad (4.29)$$

*et si pour tout  $n_0$  :*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n V_n(I_{n_0} \setminus I_n) \leq M(g, I_{n_0} \cap I) \quad (4.30)$$

*alors  $F^{loc} = g$*

*Preuve.* Pour tout  $\alpha \in I$  : la première hypothèse sur les  $I_n$  implique l'existence d'une suite extraite  $I_{\sigma(n)}$  telle que pour tout  $n$ ,  $\alpha \in I_{\sigma(n)}$ .

Comme  $g$  est semi-continue supérieurement,  $M(g, I \cap I_{\sigma(n)})$  tend vers  $g(\alpha)$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$  donc, par hypothèse  $x_{\sigma(n)} V_{\sigma(n)}(I_{\sigma(n)})$  tend vers  $g(\alpha)$  dans  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Or, pour tout  $\epsilon > 0$  et pour tout  $n$  tel que  $|I_{\sigma(n)}| < \epsilon$ , la  $k$ -stabilité de  $V_{\sigma(n)}$  permet d'écrire :

$$x_{\sigma(n)} V_{\sigma(n)}([\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]) + k \cdot x_{\sigma(n)} \geq x_{\sigma(n)} V_{\sigma(n)}(I_{\sigma(n)}).$$

En prenant la  $\limsup$  quand  $n$  tend vers l'infini, on obtient  $F([\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]) \geq g(\alpha)$ . Ceci étant vrai pour tout  $\epsilon > 0$  :  $F(\alpha) \geq g(\alpha)$ .

Il reste à montrer que  $F(\alpha) \leq g(\alpha)$ .

Fixons  $\epsilon > 0$ . Il existe  $n_0$  tel que  $I_{n_0} \subset [\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon]$ . Séparons maintenant la suite  $(I_n)_n$  en deux sous-suites  $I_{\sigma_1}$  et  $I_{\sigma_2}$  définies par :

$$\begin{aligned} \{I_{\sigma_1(n)} : n \in \mathbb{N}\} &= \{I_n : n \in \mathbb{N}, I_{n_0} \cap I_n = \emptyset\} \\ \{I_{\sigma_2(n)} : n \in \mathbb{N}\} &= \{I_n : n \in \mathbb{N}, I_{n_0} \cap I_n \neq \emptyset\} . \end{aligned}$$

Pour tout  $n$ ,  $I_{n_0} = I_{n_0} \setminus I_{\sigma_1(n)}$  donc par hypothèse :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} (x_{\sigma_1(n)} V_{\sigma_1(n)}(I_{n_0})) \leq M(g, I \cap I_{n_0}).$$

Par ailleurs :  $V_{\sigma_2(n)}(I_{n_0}) \leq 2k + \max(V_{\sigma_2(n)}(I_{n_0} \setminus I_{\sigma_2(n)}), V_{\sigma_2(n)}(I_{\sigma_2(n)}))$  donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_{\sigma_2(n)} V_{\sigma_2(n)}(I_{n_0}) \leq \max \left\{ M(g, I \cap I_{n_0}), \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_{\sigma_2(n)} V_{\sigma_2(n)}(I_{\sigma_2(n)})) \right\} .$$

Or, pour  $n$  assez grand,  $I_{\sigma_2(n)} \subset [\alpha - 2\epsilon, \alpha + 2\epsilon]$  , donc

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} x_{\sigma_2(n)} V_{\sigma_2(n)}(I_{\sigma_2(n)}) \leq M(g, I \cap [\alpha - 2\epsilon, \alpha + 2\epsilon]).$$

Finalement, les lim sup des deux suites  $I_{\sigma_1}$  et  $I_{\sigma_2}$  sont toutes deux inférieures à  $M(g, I \cap [\alpha - 2\epsilon, \alpha + 2\epsilon])$  donc

$$F(I_{n_0}) \leq M(I \cap [\alpha - 2\epsilon, \alpha + 2\epsilon]).$$

Par croissance de  $F$ ,  $F(\alpha) \leq M(I \cap [\alpha - 2\epsilon, \alpha + 2\epsilon])$ . Ceci étant vrai pour tout  $\epsilon > 0$ , on peut faire tendre  $\epsilon$  vers 0.  $\square$

**Remarque** La forme donnée pour la fonction  $F$  dans le théorème 4.6 entre évidemment dans le cadre de la partie 4.2.2 , en posant par exemple  $L = \{1/n, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $h(1/n) = x_n$  et  $U(1/n, I) = V_n(I)$ .

**Remarque** Il est facile de construire une suite  $I_n$  comme décrit dans le théorème 4.6, quel que soit l'intervalle  $I$  considéré. Par exemple, si  $I = [0, +\infty]$ , on peut diviser pour  $k$  entier variant de 0 à  $+\infty$  les intervalles  $(-1/k, k)$  en sous intervalles de la forme  $((i-1)/k, (i+1)/k)$  avec  $i$  entier variant de 0 à  $k^2 - 1$  :

$$\begin{aligned}
I_1 &= (-1, 1) \\
I_2 &= (-1/2, 1/2) \quad I_3 = (0, 1) \quad I_4 = (1/2, 3/2) \quad I_5 = (1, 2) \\
I_6 &= (-1/3, 1/3) \quad I_7 = (0, 2/3] \quad I_8 = (1/3, 1) \quad \dots \quad I_{14} = (7/3, 3) \\
&\text{etc...}
\end{aligned}$$

### 4.5.2 Spectre multifractal

Le problème de la prescription du spectre de Hausdorff  $f_H(\alpha) = \dim_H\{t : \alpha(t) = \alpha\}$  (où  $\dim_H$  est la dimension de Hausdorff) a été abordé dans [LV98] et [Jaf89]. [LTar] a considéré la prescription d'autres spectres multifractals, apparentés au spectre de Hausdorff. On s'intéresse ici à la prescription du spectre de grandes déviations discret.

Dans un cadre discret, on s'intéresse aux valeurs de la fonction  $A$  uniquement pour des intervalles de la forme :  $[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}]$ ;  $n \in \mathbb{N}$ ;  $k \in 1..2^j$ . Pour plus de simplicité dans les notations, on écrira :

$$A_{nk} = A([(k-1)2^{-n}, k2^{-n}])$$

On parlera également du spectre multifractal des  $A_{nk}$  pour désigner le spectre multifractal discret d'une mesure ou d'une fonction dont la fonction d'intervalles  $A$  associée est telle que  $A([(k-1)2^{-j}, k2^{-j}]) = A_{nk}$ .

On rappelle alors que  $f_d^g = F^{loc}$ , avec  $F(E) = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n V_n(E)$  où  $x_n = 1/(n \log 2)$  et  $V_n(E) = \log \#\{A_{nk}, A_{nk} \in E\}$

#### Prescription sur $\mathbb{R}$

**Théorème 4.1.** *Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \cup \{-\infty\}$  une fonction semi-continue supérieurement. Il existe des réels  $(A_{jk})_{j \in \mathbb{N}; k \in 1..2^j}$  telle que  $g$  est le spectre multifractal des  $A_{jk}$ .*

*Preuve.* Soit  $(I_n)_n$  une suite d'intervalles non vides tels que  $|I_n|$  tend vers 0 et  $\mathbb{R} = \cup_{n \geq N} I_n$  pour tout  $N$ . Soit une suite  $i_n$  telle que pour tout  $n$ ,  $i_n \in I_n$  (on peut par exemple choisir le milieu de  $I_n$ ).

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

On définit les  $A_{nk}$  pour  $k \in [1..2^n]$  par :

$$\begin{aligned} \text{Si } M(g, I_n) \in [0, 1] : & \quad \begin{cases} A_{nk} = i_n & , \quad k = 1 \dots \lfloor 2^{n \cdot M(g, I_n)} \rfloor \\ A_{nk} = 1 + \max(\cup_{p \leq n} I_p) & , \quad k = 1 + \lfloor 2^{n \cdot M(g, I_n)} \rfloor \dots 2^n \end{cases} \\ \text{Si } M(g, I_n) = -\infty : & \quad A_{nk} = 1 + \max(\cup_{p \leq n} I_p) \quad , \quad k = 1 \dots 2^n \end{aligned}$$

On va appliquer le lemme 4.6 pour obtenir le résultat.

Pour tout  $n : \#\{A_{nk}, A_{nk} \in I_n\} = \lfloor 2^{n \cdot M(g, I_n)} \rfloor$  avec la convention  $2^{-\infty} = 0$ . L'application  $x \rightarrow \log \lfloor x \rfloor - \log x$  est bornée sur  $[1, +\infty)$  donc il existe  $c$  tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $M(g, I_n) \neq -\infty$  :

$$|V_n(I_n) - \log(2^{M(g, I_n)})| \leq c.$$

On en déduit que pour tout  $n$  tel que  $M(g, I_n) \neq -\infty$  :

$$|x_n V_n(I_n) - M(g, I_n)| \leq c x_n.$$

De plus, si  $M(g, I_n) = -\infty$ , alors  $V_n(I_n) = M(g, I_n)$ . On en déduit que la suite  $d_{\mathbb{R}}(x_n V_n(I_n), M(g, I_n))$  tend vers 0.

Par ailleurs, on voit immédiatement que pour tout  $n_0$ , pour tout  $n$  tel que  $n > n_0 : \#\{A_{nk}, A_{nk} \in I_n \setminus I_{n_0}\} = 0$ , donc  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n V_n(I_{n_0} \setminus I_n) = -\infty$ . Les hypothèses du lemme 4.6 étant vérifiées, on peut l'appliquer pour obtenir le résultat.

□

**Remarque** Réciproquement, d'après la proposition 4.2, le spectre multifractal de toute famille  $(A_{jk})_{j \in \mathbb{N}; k \in 1..2^j}$  est une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1] \cup \{-\infty\}$  semi-continue supérieurement.

On a ainsi :

**Proposition 4.15.** *L'ensemble des spectres de grande déviations coïncide avec l'ensemble des fonctions semi-continues supérieurement de  $\mathbb{R}$  dans  $[0, 1] \cup +\infty$*

### Prescription sur $\overline{\mathbb{R}}$

On peut prolonger le spectre multifractal discret à  $\overline{\mathbb{R}}$  en posant :

$$f_g^d(+\infty) = \lim_{K \rightarrow +\infty} F_g^d([K, +\infty])$$

et

$$f_g^d(-\infty) = \lim_{K \rightarrow -\infty} F_g^d([-\infty, K])$$

On rappelle le résultat suivant [LTar] :

**Théorème 4.2.** *Si  $g : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow [0, 1]$  est un spectre multifractal, alors  $g$  a pour maximum 1.*

Pour éviter une démonstration trop lourde, on effectue un "changement de variable" qui permet de contourner les cas particuliers  $\alpha = \pm\infty$  dans la définition de  $f_g^d(\alpha)$

On pose, pour tout  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$  :

$$\tilde{N}_\epsilon(\theta, j) = \#\{k \text{ tels que } \arctan(A_{jk}) \in [\theta - \epsilon, \theta + \epsilon]\} \quad (4.31)$$

On définit ensuite de manière analogue

$$\tilde{f}_g^d(\theta, \epsilon) = \limsup_n \frac{\log(\tilde{N}_\epsilon(\theta, n))}{\log(2^n)} \quad (4.32)$$

Puis :

$$\tilde{f}_g^d(\theta) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{f}_g^d(\theta, \epsilon) \quad (4.33)$$

On peut alors vérifier assez facilement que pour tout  $\theta$  de  $[-\pi/2, \pi/2]$  :

$$\tilde{f}_g^d(\theta) = f_g^d(\tan(\theta))$$

avec la convention  $\tan(\pm\infty) = \pm\pi/2$ .

Nous allons montrer que  $\tilde{f}_g^d(\theta)$  a pour maximum 1 sur  $[-\pi/2, \pi/2]$ .

Remarquons d'abord que pour tout  $\theta$ , tout  $\epsilon$  et tout  $j$ ,  $\tilde{N}_\epsilon(\theta, j) \leq 2^j$ . Ainsi, 1 est un majorant de  $\tilde{f}_g^d$ , donc de  $f_g^d$ .

Montrons que  $\tilde{f}_g^d$  atteint la valeur 1.

On peut diviser  $J_0 = [-\pi/2, \pi/2]$  en deux intervalles  $[-\pi/2, 0]$  et  $[0, \pi/2]$  dont au moins un contient au moins  $2^{j-1}$  éléments  $\arctan A_{jk}$  pour une infinité d'indices  $j$ . Soit  $J_1$  cet intervalle.

De même,  $J_1$  peut être divisé en deux intervalles de diamètre inférieur à  $\pi/4$  dont au moins un contient au moins  $2^{j-2}$  éléments  $\arctan A_{jk}$  pour une infinité d'indices  $j$ . Soit  $J_2$  cet intervalle.

Itérons le procédé pour obtenir une suite d'intervalles emboîtés et non vides  $(J_m)_{m \in \mathbb{N}}$  dont le diamètre tend vers 0 et qui contiennent au moins  $2^{j-m}$  éléments  $\arctan A_{jk}$  pour une infinité d'indices  $j$ .

Soit  $\{\theta_0\}$  leur intersection, où  $\theta_0 \in [-\pi/2, \pi/2]$ . Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $m$  tel que  $J_m \subset [\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon]$  donc  $[\theta_0 - \epsilon, \theta_0 + \epsilon]$  contient au moins  $2^{j-m}$  éléments  $\arctan A_{jk}$  pour une infinité d'indices  $j$ . Ainsi,  $\tilde{f}_g^d(\theta_0, \epsilon) = 1$ . Ceci étant vrai pour tout  $\epsilon$ ,  $\tilde{f}_g^d(\theta_0) = 1$ . Finalement,  $f_g^d(\tan \theta_0) = 1$ , avec la convention  $\tan(\pm\infty) = \pm\pi/2$ .

On peut démontrer le théorème suivant :

**Théorème 4.2.** *Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \cup \{-\infty\}$  une fonction semi-continue supérieurement sur  $\mathbb{R}^1$  et de maximum 1. Alors il existe des réels  $(A_{jk})_{j \in \mathbb{N}; k \in 1..2^j}$  tels que  $g$  est le spectre multifractal des  $A_{jk}$ .*

On conserve les notations (4.31), (4.32) et (4.33) de la partie précédente. Nous allons commencer par montrer le résultat intermédiaire suivant :

**Lemme 4.7.** *Soit  $\tilde{g} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [0, 1] \cup \{-\infty\}$  une fonction semi-continue supérieurement sur  $[-\pi/2, \pi/2]$  et de maximum 1.*

*Alors il existe des réels  $(A_{jk})_{j \in \mathbb{N}; k \in 1..2^j}$  tels que  $\tilde{f}_g^d = \tilde{g}$ .*

*Preuve.* On peut facilement construire  $(I_n)_n$  une suite d'intervalles tels que  $|I_n|$  tend vers 0 et  $[-\pi/2, \pi/2] = \cup_{n \geq N} I_n$  pour tout  $N$  ainsi que des réels  $i_n$  vérifiant  $i_n \in I_n$  et  $i_n \neq \pm\pi/2$ .

Soit  $\theta_{max}$  un point de  $[-\pi/2, \pi/2]$  tel que  $\tilde{g}(\theta_{max}) = 1$

On peut facilement construire  $(j_n)_n$  une suite de points de  $(-\pi/2, \pi/2)$  telle que pour tout  $n$  et tout  $p \leq n : j_n \in I_p \Rightarrow \theta_{max} \in I_p$  (si  $\theta_{max} \in (-\pi/2, \pi/2)$ ,  $j_n = \theta_{max}$  convient tout à fait)

On définit les  $A_{nk}$  par :

$$\begin{aligned} \text{Si } M(g, [-\pi/2, \pi/2] \cap I_n) \in [0, 1] : & \quad \begin{cases} A_{nk} = \tan i_n & , \quad k = 1 \dots \lfloor 2^{n.M(g, I_n)} \rfloor \\ A_{nk} = \tan j_n & , \quad k = \lfloor 2^{n.M(g, I_n)} \rfloor + 1 \dots 2^n \end{cases} \\ \text{Si } M(g, [-\pi/2, \pi/2] \cap I_n) = -\infty : & \quad A_{nk} = \tan j_n \quad , \quad k = 1 \dots 2^n \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>C'est à dire semi-continue supérieurement sur  $\mathbb{R}$  et vérifiant de plus :  $g(+\infty) \geq \limsup_{x \rightarrow +\infty} g(x)$  et  $g(-\infty) \geq \limsup_{x \rightarrow -\infty} g(x)$



$\tilde{f}_g^d = F^{loc}$  avec  $F(E) = \limsup_n x_n V_n(E)$  avec  $V_n(E) = \#\{k, \arctan(A_{nk}) \in [\theta - \epsilon, \theta + \epsilon]\}$ .

Pour tout  $n : \#\{A_{nk}, \arctan A_{nk} \in I_n\} = \lfloor 2^{nM(g, I_n)} \rfloor$  avec la convention  $2^{-\infty} = 0$ . De même que précédemment :  $d_{\mathbb{R}}(x_n V_n(I_n), M(g, I_n))$  tend vers 0.

Pour tout  $m$  tel que  $\theta_{max} \notin I_m$ , pour tout  $n$  tel que  $n > m$  :

$$\#\{A_{nk}, A_{nk} \in I_n \setminus I_m\} = 0$$

donc  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n V_n(I_m \setminus I_n) = -\infty$ . De plus, si  $\theta_{max} \in I_m$ , alors  $M(g, I_n) = 1$ . Or, pour tout  $n$ ,

$$\#\{A_{nk}, \arctan A_{nk} \in I_m \setminus I_n\} \leq 2^n$$

donc  $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n V_n(I_m \setminus I_n) \leq M(g, I_n)$ .

On peut appliquer le lemme 4.6 pour obtenir  $\tilde{f}_g^d = \tilde{g}$  □

Pour obtenir le théorème 4.2 , il suffit d'appliquer le lemme 4.7 à  $\tilde{g}(\theta) = g(\tan(\alpha))$  avec la convention  $\tan(\pm\infty) = \pm\pi/2$ .

**Remarque** Réciproquement, d'après le lemme 4.2 : pour toute famille de réels  $(A_{jk})_{j \in \mathbb{N}; k \in 1..2^j}$  la fonction  $\tilde{f}_g^d$  est semi-continue supérieurement, donc le spectre multifractal de toute famille  $A_{jk}$  est semi-continu supérieurement sur  $\mathbb{R}$ . De plus, le spectre multifractal de toute famille  $A_{jk}$  atteint la valeur 1 sur  $\mathbb{R}$  (théorème 4.2)

Finalement, on a le résultat :

**Proposition 4.16.** *Une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \cup -\infty$  est un spectre multifractal de grande déviation si, et seulement si elle est semi-continue supérieurement sur  $\mathbb{R}$  et atteint la valeur 1 sur  $\mathbb{R}$*

### 4.5.3 Spectre 2-microlocal

Le problème de la prescription de la frontière 2-microlocale a été abordé dans [LS04, Mey98].

On rappelle que  $-\chi = F_U^{loc}$ , avec  $F_U(E) = \limsup_{t \rightarrow 0; t \in L} h(t)U(t, E)$  où  $L = \{2^{-j}, k2^{-j}\}$ ,  $h(2^{-j}, k2^{-j}) = 1/j$  et, pour  $t \in L$  :  $U(t, E) = \log(|C(t)| \cdot 1_{t \in D_E})$

**Théorème 4.3.** *Soit  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  une fonction semi-continue inférieurement. Il existe une distribution  $f = \sum_{j,k} d_{jk} \psi_{jk}$  telle que  $g$  est le spectre 2-microlocal de  $f$  en  $x_0$ .*

*Preuve.* Sans perte de généralité, on suppose  $x_0 = 0$ . Soit  $(I_n)_n$  une suite d'intervalles ouverts tels que  $|I_n|$  tend vers 0 et  $[0, 1] \subset \cup_{n \geq N} I_n$  pour tout  $N$ . On suppose de plus pour tout  $n : I_n \cap [0, 1] \neq \emptyset$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on choisit  $t_n \in L_d \cap D_{I_n}$  et vérifiant de plus :

- $\|t_n\|_\infty < \|t_{n-1}\|_\infty$

Cette condition permet de s'assurer que chaque élément  $t_n$  n'est choisi qu'une seule fois.

- $\|t_n\|_\infty < 1/n$

Cette condition permet de s'assurer que  $t_n$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

Pour avoir des notations plus simples, on pose :  $t_n = (2^{-j(n)}, k(n).2^{-j(n)})$ . ( $j(n)$  et  $k(n)$  sont entiers car on a supposé  $t_n \in L_d$ )

On définit enfin les  $d_{jk}$  par :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} & : d_{j(n)k(n)} = 2^{j/2} 2^{-j(n)M(-g, I_n)} \\ \text{Si } (j, k) \notin \{(j(n), k(n)), n \in \mathbb{N}\} & : d_{jk} = 0 \end{aligned}$$

Etant donné la manière donc sont définis les  $d_{jk}$ , le spectre 2-microlocal en 0 de  $f = \sum_{j,k} d_{jk} \psi_{jk}$  s'écrit  $-\chi = F^{loc}$ , avec  $F(E) = \limsup_{n \rightarrow \infty} (x_n V_n(E))$  où

$$x_n = 1/(j(n) \log 2)$$

tend vers 0 et

$$V_n(E) = \log(2^{-j/2} d_{j(n)k(n)} \cdot 1_{t_n \in D_E})$$

est semi-stable. Pour tout  $n \in \mathbb{N} : x_n V_n(I_n) = M(-g, I_n)$ . De plus, pour tout  $(n_0, n) : t_n \in D_{I_{n_0}}$  donc  $V_n(I_{n_0} \setminus I_n) = -\infty$ . Les hypothèses du lemme 4.6 sont vérifiées et  $\chi = g$ .  $\square$

**Remarque** Réciproquement, d'après le lemme 4.2, le spectre 2-microlocal de toute distribution  $f$  en un point quelconque est une fonction de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R} \cup \pm\infty$  semi-continue inférieurement.

Finalement, une fonction  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \cup +\infty$  est un spectre 2-microlocal si, et seulement si elle est semi-continue supérieurement.

# Chapitre 5

## Débruitage

### 5.1 Introduction

#### 5.1.1 Rappels sur le débruitage

Le débruitage est une application importante en traitement du signal. Un signal initial est détérioré par un bruit dû à différentes causes, comme une faiblesse lors de l'acquisition des données, une détérioration du support sur lequel le signal est enregistré ou des pertes lors d'une transmission, et on n'a accès qu'au signal bruité. Il s'agit, à partir du signal bruité et de certaines connaissances *a priori* sur le signal initial et le bruit, de retrouver le signal original ou du moins un signal possédant des caractéristiques proches de celui-ci. Les connaissances *a priori* et les caractéristiques que l'on cherche à retrouver peuvent varier d'une situation à l'autre. De multiples techniques ont donc été développées.

Les approches à base d'ondelettes [DL92, Don94, ABS01] ont connu une expansion importante durant ces dix dernières années et ont montré leur efficacité dans de nombreuses situations, à la fois d'un point de vue théorique et dans diverses applications.

#### 5.1.2 Quelques méthodes de débruitage par ondelettes

Les méthodes de débruitage par ondelettes les plus classiques sont les méthodes de débruitage par seuillage. On se place dans le cadre suivant : le signal mesuré est le vecteur  $X = Y + B$  où  $X$  est le signal initial et  $B$  un bruit blanc. Les méthodes de débruitage par seuillage sont fondées sur l'idée que le signal initial est "structuré" et possède donc peu de gros coefficients d'ondelettes et beaucoup de coefficients négligeables, tandis que le bruit blanc  $B$  a tous ses coefficients d'ondelette uniformément distribués (lorsqu'on utilise une base or-

thonormale d'ondelettes). Ainsi, une idée naturelle pour estimer les coefficients du signal initial à partir de ceux du signal bruité est de mettre les petits coefficients à zéro et de conserver (ou de diminuer légèrement) les gros coefficients. Il existe trois grandes classes de seuillage : le seuillage peut être local, global ou par blocs. Dans cette section,  $x = (x_{jk})_{j,k}$  désigne les coefficients d'ondelette du signal initial,  $y = (y_{jk})_{j,k}$  désigne les coefficients d'ondelette du signal bruité  $g$  et  $\hat{x} = (\hat{x}_{jk})_{j,k}$  désigne les coefficients d'ondelettes du signal débruité  $\hat{X}$ .

### Seuillage local

Dans le seuillage local, chaque coefficient est sujet à un seuillage indépendamment des autres coefficients. Les deux seuillages les plus connus de cette catégorie sont le Hard et le Soft Thresholding, dont on rappelle les règles de décision :

$$\begin{aligned}\text{Hard Thresholding} & : \hat{x} = y \cdot 1_{|y| \geq \lambda} \\ \text{Soft Thresholding} & : \hat{x} = \text{sign}(y) \cdot \max(0, |y| - \lambda)\end{aligned}$$

De nombreuses variantes de ces seuillages existent. Plusieurs seuils sont envisageables (voir [ABS01] pour un exposé plus complet).

Si le seuil  $\lambda$  est identique pour tous les coefficients, on parle d'estimateur à seuil fixe, sinon on parle de seuillage local avec seuil variable. On donne les seuils les plus courants et qui garantissent l'aspect minimax de ces estimateurs à un facteur  $n$  près.

- Le seuil minimax  $\lambda^M$  :

$$\lambda^M = \hat{\sigma} \lambda_n^*$$

Où  $\lambda_n^* = \inf_{\lambda} \sup_x \left\{ \frac{R_{\lambda}(x)}{2^{-n} + R_{\text{oracle}}(x)} \right\}$  avec  $\hat{\sigma}$  l'écart-type du bruit estimé,  $R_{\lambda}(x) = E((\hat{x}_{\lambda}(y) - x)^2)$  et  $R_{\text{oracle}}(x)$  le risque idéal obtenu grâce à un oracle. Les deux oracles les plus courants sont le DLP (diagonal linear projection) qui nous indique si on doit conserver ou non un coefficient et le DLS (diagonal linear shrinker) qui nous indique de combien on doit atténuer chaque coefficient. Les risques obtenus pour ces oracles sont :

$$R_{\text{oracle}}^{DLP}(x) = \min(x^2, 1)$$

$$R_{\text{oracle}}^{DLS}(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}.$$

On ne peut utiliser le seuil minimax sous cette forme, ce seuil a été calculé (voir [Don95]) et ses valeurs selon le nombre de points du signal ont été tabulées (voir [ABS01]).

- Le seuil universel  $\lambda^U$

$$\lambda^U = \hat{\sigma} 2^{-n/2} \sqrt{2n}.$$

Le seuil universel est plus grand que le seuil minimax, ce qui rend l'estimateur du signal original plus lisse. Par contre ce seuil assure avec une haute probabilité que le signal nul perturbé par du bruit sera correctement estimé à zéro. Ce résultat découle de la propriété suivante : si  $X_1 \dots X_n$  sont i.i.d. et  $N(0, 1)$ , alors :

$$P \left\{ \max_{1 \leq j \leq n} |X_j| > \sqrt{2 \log(n)} \right\} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi \log(n)}} \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

- Le seuil SURE  $\lambda_j^S$ .

Le seuil SURE (Stein's Unbiased Risk) est le seuil minimisant la quantité SURE :

$$SURE(\lambda, X) = S - 2 \mathbb{E} \{ i, \|X_i\| \leq \lambda \} + \min(\|X_i\|, \lambda)^2$$

avec  $X_i = \frac{y_{j,k}}{\hat{\sigma}}$  et  $S = 2^{j-1}$ . Ainsi :

$$\lambda_j^S = \operatorname{argmin}_{0 \leq \lambda \leq \lambda_j^U} \left[ SURE \left( \lambda, \frac{y_{j,k}}{\hat{\sigma}} \right) \right] \text{ avec } \lambda_j^U = \hat{\sigma} \sqrt{2 \log(2^j)}$$

## Seuillage global

Dans le cas du seuillage global, un niveau entier de coefficients subit le même traitement (c'est à dire est conservé ou non). Dans ce cadre, G. Kerkyarcharian, D. Picard et K. Tribouley ont proposé les deux seuillages suivants, de forme similaire au Hard et au Soft Thresholding :

$$\begin{aligned} \text{Global hard thresholding} & : \hat{x} = y \cdot 1_{S_j(p) > 2^{j-\frac{np}{2}}} \\ \text{Global soft thresholding} & : \hat{x} = y \cdot \max \left( \frac{S_j(p) - 2^{\frac{j-np}{2}}}{S_j(p)}, 0 \right) \end{aligned}$$

avec  $p \geq 1$  un paramètre et  $S_j(p)$  une certaine statistique décrite dans [DKT96].

## Seuillage par blocs

Le seuillage par blocs est une procédure intermédiaire entre le seuillage local et le seuillage global, introduite par D. Picard, G. Kerkyarcharian et P. Hall. La technique consiste à diviser les entiers en blocs ne se recouvrant pas et de longueur  $l$ . On définit le bloc  $k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  par :

$$B_k = \{m, (k-1).l < m \leq k.l\}.$$

On considère

$$b_{j,k} = \frac{1}{l} \sum_{m \in B_k} x_{j,m}^2$$

On estime  $b_{j,k}$  par :

$$\hat{b}_{j,k} = \frac{1}{l} \sum_{m \in B_k} \hat{x}_{j,m}^2.$$

on effectue ensuite un seuillage sur ce coefficient pour traiter le bloc avec un seuil de  $c2^{-n}$  (où  $c$  est une constante paramétrant le seuil). La plupart du temps, un seuillage par blocs donne de meilleurs résultats asymptotiques qu'un seuillage local car il permet de s'affranchir du facteur  $n$  dans le taux de convergence.

## Raffinements de la méthode du seuillage

Le seuillage doux a généralement pour inconvénient de surlisser fortement les pics. Le débruitage par seuillage dur entraîne souvent des “oscillations” parasites, qui s'apparentent au phénomène de Gibbs. Ce phénomène est appelé ringing. Afin d'éviter ce phénomène, différentes approches ont été développées.

L'algorithme nommé 'translation invariant wavelet hard thresholding', introduit par Coifman et Donoho dans [CD95] consiste à appliquer le processus de seuillage à des versions translatées du signal original, puis à moyenner les signaux obtenus après débruitage. Ce processus permet de gommer en grande partie le ringing, mais a tendance à lisser les parties texturées du signal original.

Notre approche s'inscrit dans un paradigme récent qui cherche à utiliser des informations *a priori* sur le signal pour améliorer le résultat de débruitage par seuillage. Ce paradigme est particulièrement clairement exprimé dans l'introduction de [CS00], citée ci-dessous :

"Given an imperfectly described signal, it is often the case that a few of its

parameters are given with good precision whereas other parameters are known only vaguely or are a priori essentially unknown. If one believes, however, that the unknown parameters are somehow correlated with the known ones, then it is reasonable to try to extrapolate the unknown parameters from the available ones. This involves exploitation of additional, external principles of our choice the ones that are believed to express relations between the two groups of parameters."

Dans le cas du débruitage, les coefficients d'ondelettes du signal original qui sont plus petits en valeur absolue que l'écart type du bruit sont essentiellement perdus. Plutôt que de mettre à zéro les "petits" coefficients du signal bruité, comme le fait le seuillage dur, on peut mettre au point diverses méthodes pour tenter de les extrapoler à partir des "gros" coefficients.

La méthode de débruitage décrite par Sylvain Durand et Jacques Froment dans [DF03] s'effectue en deux temps :

- Appliquer une méthode de débruitage traditionnelle, par exemple un seuillage dur, puis enregistrer les indices des coefficients non seuillés dans un ensemble  $M$ .
- Restaurer le signal débruité, en minimisant la variation totale sous la contrainte que les coefficients du signal débruité et du signal restauré sont les mêmes dans  $M$ . En d'autres termes, au lieu de mettre à zéro les coefficients se trouvant sous le seuil, cette méthode les ajuste de façon à minimiser la variation totale.

Cette méthode a pour avantage de diminuer très fortement l'effet de 'ringing', mais elle est assez lente et a également tendance à supprimer les parties texturées du signal initial.

Coifman et Sowa [CS00] ont proposé une formulation plus générale qui s'applique aussi bien à l'atténuation des effets indésirables du seuillage qu'à d'autres problématiques, comme la quantification lors de la compression de signaux. Dans notre cadre, cette approche peut être décrite comme suit : Soit  $J$  l'ensemble des indices pour lesquels les coefficients d'ondelettes sont plus petits que le seuil, et  $I$  son complémentaire. Le signal débruité  $\tilde{f}_n$  sera un signal qui vérifie les contraintes globales suivantes : les coefficients de  $\tilde{f}_n$  dont les indices appartiennent à  $I$  (ceux qui sont supérieurs au seuil) sont conservés (comme dans le cas du seuillage dur). On choisit les autres de telle sorte qu'ils soient tous plus petits en valeur absolue qu'une certaine constante  $Q$  (typiquement, le seuil), et de manière à ce

que "l'énergie"  $\Phi(\tilde{f}_n)$  soit minimale. La fonctionnelle  $\Phi$  doit posséder certaines propriétés de régularité, et est choisie en fonction de l'application visée.

Comme nous le verrons ci-dessous, notre interprétation du paradigme cité plus haut consiste à extrapoler les coefficients inconnus de manière à satisfaire une contrainte sur la régularité locale en chaque point, plutôt que sur "l'énergie" globale du signal. Nous expliquerons en détail comment la contrainte de régularité locale permet de prendre en compte de façon directe l'information contenue dans les "gros" coefficients.

### 5.1.3 Limites du débruitage par seuillage

Un des inconvénient principaux des méthodes de débruitage par ondelettes est leur inadaptation aux signaux texturés et aux signaux qui sont eux-mêmes très irréguliers, comme les signaux "fractals" ou ceux dont la régularité locale varie. Ainsi, il est bien connu que le débruitage par seuillage dur lorsque le signal initial est texturé conduit en général à un surlissage d'un signal initial irrégulier si trop de coefficients sont annulés et/ou à la présence d'oscillations s'apparentant à du "ringing" si les coefficients du bruit ne sont pas tous seuillés.

On peut se reporter aux figures 5.2, 5.3, 5.4 et 5.5, où on a représenté pour différents échantillonnages une fonction de Weierstrass d'exposant  $\alpha = 1/2$  bruitée par un bruit blanc additif gaussien, puis débruitée par seuillage dur avec le seuil universel. Sur chacun des graphiques, on a représenté les coefficients d'ondelettes correspondants. On constate que, bien que le signal débruité ait des valeurs proches du signal initial, il est surlissé. Ceci est dû au fait suivant : pour les petites échelles ( $j$  proche de  $n$ ), les coefficients d'ondelette du signal initial, de l'ordre de  $2^{-j\alpha}$ , sont petits devant les coefficients du bruit blanc. Ainsi, les coefficients correspondants du signal bruité sont de l'ordre de grandeur des coefficients du bruit blanc et ils sont annulés lorsque le seuillage est effectué. On obtient donc un signal débruité dont les coefficients dans les petites échelles sont tous nuls, tandis que les coefficients d'ondelette du signal initial sont proportionnels à  $2^{-j\alpha}$ . Or, ce sont les coefficients des petites échelles qui donnent l'impression de texture de la fonction, comme on peut le vérifier figure 5.1, où des courbes dont les coefficients d'ondelettes diffèrent uniquement sur une certaine gamme d'échelles sont représentées.



### 5.1.4 Approche choisie

Notre but est de remédier à cet inconvénient des méthodes de débruitage par seuillage en proposant une méthode qui permette de retrouver la régularité du signal initial, d'abord en termes de régularité globale, puis en termes de frontière 2-microlocale en un point.

Dans toute la suite, on suppose pour simplifier que la fonction  $f$  à laquelle on s'intéresse a tous ses coefficients nuls en dehors de l'intervalle  $[0, 1]$ , ce qui permet de lui appliquer le théorème suivant :

**Proposition 5.1.** *[Jaf04] Soit  $\psi$  vérifiant les hypothèses usuelles et ayant suffisamment de moments nuls.*

*Soit  $f \in C^\epsilon(\mathbb{R})$  pour  $\epsilon > 0$  et à support borné. Alors :*

$$1/2 + \alpha_g(f) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \min_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\log |\langle f, \psi_{jk} \rangle|}{-j} \quad (5.1)$$

Lorsqu'on travaille sur des signaux discrets, une difficulté qui se pose est l'estimation de l'exposant de Hölder de ces signaux. En effet, on ne dispose que d'une résolution finie, et, pour un signal échantillonné sur  $2^n$  points, les coefficients d'ondelettes peuvent être calculés uniquement pour  $j \leq n$ . Or, la valeur de l'exposant de Hölder est indépendante d'un nombre fini quelconque de coefficients d'ondelettes.

Remarquons aussi le fait suivant : les signaux débruités par la méthode du seuillage dur présentent une irrégularité qui n'est pas uniforme suivant l'échelle à laquelle on se place. En reprenant l'exemple précédent d'une Weierstrass débruitée par la méthode du seuillage dur avec le seuil universel et en augmentant fortement le nombre de points, on constate que, en se plaçant "loin" du signal, le signal initial et le signal débruité vont finir par présenter la même irrégularité (voir par exemple la figure 5.5, où les deux fonctions commencent à présenter la même allure). En revanche, lorsqu'on s'approche des courbes, on constate que le signal débruité reste toujours plus lisse que le signal initial.

Ces deux raisons nous incitent à définir un exposant global sur une gamme d'échelles finie,  $\alpha_g(j_1, j_2, f)$  de manière cohérente avec la proposition 5.1. L'idée

la plus naturelle est de prendre :

$$1/2 + \alpha_g(j_1, j_2, f) = \min_{j \in [j_1, j_2]} \min_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\log |\langle f, \psi_{jk} \rangle|}{-j} \quad (5.2)$$

C'est ce qui est fait dans la partie 5.2. Nous justifions cette définition par ses propriétés asymptotiques : si on s'intéresse à une fonction  $f$  fixée, alors  $\alpha_g(h(n), n, f)$  tend vers  $\alpha_g(f)$  à condition de choisir  $h$  "suffisamment lente". Une démarche analogue, valable uniquement des hypothèses restrictives a été suivie dans [LL03, PLD04] en estimant l'exposant par une régression linéaire. La démarche que nous suivons est plus "proche" de l'égalité (5.1) et plus générale.

Dans la partie 5.3, nous étudions le comportement de la suite  $\alpha_g(h(n), n, f_n)$  lorsque les  $\langle f_n, \psi_{jk} \rangle$  sont les approximations des coefficients  $\langle f, \psi_{jk} \rangle$  d'une fonction  $f$  fixée obtenues en utilisant un échantillonnage à  $2^n$  points de cette fonction  $f$ . Nous montrons que la suite  $\alpha_g(h(n), n, f)$  converge bien vers  $\alpha_g(f)$  à condition que  $h$  soit suffisamment lente.

Dans la partie 5.4, nous étudions le comportement de la suite  $\alpha_g(h(n), n, f_n)$  lorsque les  $f_n$  sont les échantillonnages à  $2^n$  points d'une fonction  $f$  fixée, bruitée par un bruit blanc additif gaussien. Nous montrons que la suite  $\alpha_g(h(n), n, f)$  tend vers 0.

Dans la partie 5.5, nous étudions le comportement de la suite  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n)$  où  $\tilde{f}_n$  est la fonction  $f$  échantillonnée, bruitée puis débruitée par la méthode du seuillage dur avec le seuil universel. Nous retrouvons de manière quantitative les considérations exposés dans la section 5.1.3 : si la suite  $h(n)$  tend "très lentement" vers l'infini (ce qui correspond à regarder le signal "de loin"), alors  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n)$  va tendre vers  $\alpha_g(f)$ . En revanche, si la suite  $h(n)$  est plus grande que  $\frac{n}{1+2\alpha_g(f)}$  (ce qui signifie que l'on "regarde" le signal de plus près pour évaluer sa texture), alors  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend vers l'infini. Nous suivons la même démarche pour un seuillage en  $2^{-j\delta}$  et montrons que la suite  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend vers 0 ou  $\infty$  suivant la valeur de  $\delta$ .

Dans la partie 5.6, nous présentons un moyen, à la base de notre méthode de débruitage, d'obtenir l'"échelle de coupure" au delà de laquelle les coefficients de la fonction initiale sont petits devant ceux du bruit.

Dans la partie 5.7, nous donnons une méthode de débruitage, qui nous permet de retrouver la régularité du signal initial. D'un point de vue pratique, la

démarche adoptée est la suivante :

- On cherche l’“échelle de coupure”, à partir de laquelle les coefficients du bruit blanc deviennent plus grands que les coefficients du signal original
- On estime l’exposant de Hölder global (ou les valeurs du spectre 2-microlocal) à partir des coefficients se situant aux échelles supérieures : les coefficients des hautes échelles vont décroître grossièrement en  $2^{K-js}$ , où  $s$  est l’exposant de Hölder global.
- On assigne une valeur aux coefficients qui se trouvent en dessous de cette échelle, de manière qu’ils soient “cohérents” avec ceux des échelles supérieures. Si les  $\psi_{jk}$  sont une base orthonormale d’ondelettes,  $g_n$  le signal bruité, alors le signal  $\tilde{f}_n$  débruité est donné par :

$$\langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle = \begin{cases} \langle g_n, \psi_{jk} \rangle & \text{si } j \leq c(n) \\ \min(|\langle g_n, \psi_{jk} \rangle|, 2^{K-j(s_n+1/2)}) \operatorname{sgn}(\langle g_n, \psi_{jk} \rangle) & \text{si } j > c(n) \end{cases} \quad (5.3)$$

Où  $c$  est l’échelle de coupure estimée, et  $K$  et  $s$  sont les réels estimés au moyen des coefficients se trouvant au-dessus de l’échelle de coupure.

Cette approche peut être rapprochée de celle exposée dans [DKT96] et exposée au paragraphe 5.1.2, puisque la valeur prise par le coefficient du signal débruité ne dépend pas uniquement de la valeur du coefficient du signal bruité, mais aussi des valeurs de tous les coefficients qui se trouvent au-dessus de l’échelle de coupure. De plus, le traitement s’effectue également “par échelles” : pour une échelle donnée, une même transformation simple est appliquée à tous les coefficients de l’échelle. Ainsi, au lieu du choix entre “laisser inchangés tous les coefficients de l’échelle  $j$ ” et “les mettre tous à zéro”, on a le choix entre “laisser inchangés tous les coefficients de l’échelle  $j$ ” et “les rapprocher de zéro jusqu’à ce qu’ils ne perturbent plus la régularité du signal”.

Cette approche peut également être rapprochée de celle exposée dans [CS00] et [DF03], également exposée au paragraphe 5.1.2 : au lieu d’ajuster les coefficients “de bruit” de manière à minimiser l’énergie  $\Phi(f_n)$  (ou la variation totale), on veut les ajuster de manière à retrouver l’exposant de Hölder global du signal initial.

Nous montrons que cette méthode permet d’éviter l’inconvénient rencontré pour le seuillage dur :  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend vers  $\alpha_g(f)$  pour toute fonction  $h(n) \leq n$  qui tend vers l’infini.

Dans la partie 5.8, nous étendons les considérations de la partie 5.5 à la régularité au sens de la frontière 2-microlocale. Nous montrons ainsi que le seuillage dur peut, dans un certain sens, introduire des oscillations.

Enfin, dans la partie 5.9, nous exposons une méthode de débruitage qui permet d'éviter cet inconvénient.

## 5.2 Exposant “entre deux échelles”

### 5.2.1 Cas d'une fonction unique

La relation (5.1) de la proposition 5.1 montre que l'exposant de Hölder local peut être écrit comme une  $\liminf$ .

Pour simplifier les notations, nous définissons l'“exposant de Hölder de grain à l'échelle  $j$ ” :

$$\alpha_g(j, f) = \min_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\log |\langle f, \psi_{jk} \rangle|}{-j} - 1/2.$$

Avec cette notation

$$\alpha_g(f) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \alpha_g(j, f).$$

Si cette  $\liminf$  est une limite, alors  $\alpha_g(f)$  est facile à évaluer. Il suffit de calculer assez de termes de la suite  $\alpha_g(j, f)$ , jusqu'à ce qu'un critère de fin soit atteint. Ceci n'est cependant pas vrai en général et seule une sous-suite de  $\alpha_g(\sigma(j), f)$  tend vers  $\alpha_g(f)$ .

Une idée naturelle est de définir une autre suite qui tend vers  $\alpha_g(f)$ , le  $n$ -ième terme de la suite étant défini uniquement à l'aide des  $n$  premiers termes de  $\alpha_g(j, f)$ . Il semble intéressant de garder les plus petits termes de la suite  $\alpha_g(j, f)$  durant plusieurs indices, dans le but de “lisser” la suite et de la rendre convergente. Par exemple, si  $\alpha_g(j, f) = -1/j + \text{mod}(j, 3)$  alors la suite  $(\min_{j=n-3..n} \alpha_g(j, f))_n$  tend vers  $\alpha_g(f)$ .

Ainsi, considérer le minimum de  $\alpha_g(j, f)$  sur un nombre fini de termes augmentera nos chances d'obtenir une suite qui converge.

Nous définissons pour cette raison l'“exposant de grain entre les échelles  $n_1$  et  $n_2$ ” :

$$\alpha_g(n_1, n_2, f) = \min_{j \in n_1 \dots n_2, k \in \mathbb{Z}} \frac{\log |\langle f, \psi_{jk} \rangle|}{-j} - 1/2 \quad (5.4)$$

Soit  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  une fonction croissante et telle que :

$$\begin{cases} h(n) \leq n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h(n) = +\infty \end{cases}$$

Les remarques suivantes sont évidentes :

- $\liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_g(h(n), n, f) = \alpha_g(f)$ .
- Si  $(\alpha_g(h(n), n, f))_n$  converge, alors sa limite est  $\alpha_g(f)$ .
- $(\alpha_g(h(n), n, f))_n$  converge si et seulement s'il existe une suite  $(\alpha_g(\sigma(k), f))_k$  qui tend vers  $\alpha_g(f)$  et telle que pour tout  $n$ , il existe  $k$  tel que  $\sigma(k) \in h(n) \dots n$ .
- $(\alpha_g(h(n), n, f))_n$  converge si et seulement s'il existe une suite  $(\alpha_g(\sigma(k), f))_k$  qui tend vers  $\alpha_g(f)$  et telle que pour tout  $k : \sigma(k) \geq h(\sigma(k+1) - 1)$ .
- Si  $h_1 \leq h_2$  alors la convergence de  $(\alpha_g(h_2(n), n, f))_n$  implique la convergence de  $(\alpha_g(h_1(n), n, f))_n$ .
- Etant donnée  $f$ , il existe  $h$  telle que  $(\alpha_g(h(n), n, f))_n$  converge.
- Etant donnée  $h$ , il existe  $f$  telle que  $(\alpha_g(h(n), n, f))_n$  diverge.

Les quatre premiers points se déduisent dans l'ordre les uns des autres, et les trois derniers sont immédiats à partir quatrième point.

Les trois derniers points peuvent être interprétés comme suit : la fonction  $h$  doit tendre vers  $+\infty$ , mais elle peut tendre vers  $+\infty$  aussi lentement que l'on veut. Si on fixe une fonction  $f$ , on peut toujours trouver une fonction  $h$  qui tend suffisamment lentement vers  $+\infty$  pour que  $(\alpha_g(h(n), n, f))_n$  converge. Cependant, on ne peut pas trouver de fonction  $h$  "suffisamment lente" pour toute fonction  $f$ .

Si on revient à la signification visuelle de l'exposant de Hölder, on vérifie facilement qu'en pratique, les coefficients des hautes échelles n'ont pas d'influence sur la sensation de rugosité ou de régularité donnée par un signal (voir la figure 5.1). Ceci semble suggérer que l'utilisateur sépare intuitivement les coefficients en coefficients des échelles "macroscopiques" qui donnent la forme générale du signal et en coefficients "de texture" qui donnent l'impression de rugosité de cce signal. Ainsi, les indices  $j \in h(n) \dots n$  peuvent être vus comme échelles de texture, tandis que les indices  $j < h(n)$  peuvent être vus comme les échelles macroscopiques dont la valeur n'a pas d'influence sur la régularité du signal.

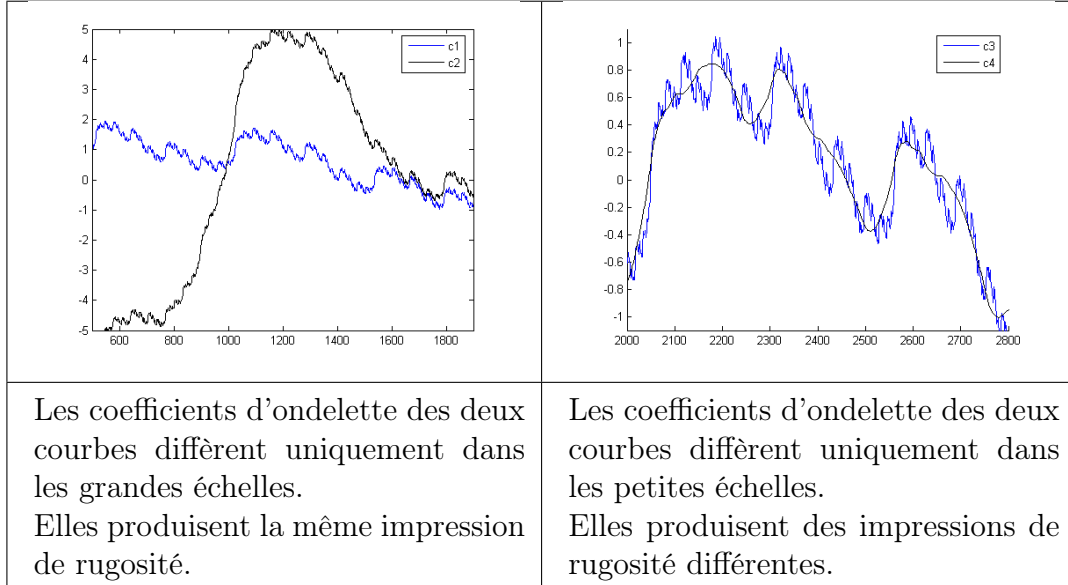


FIG. 5.1 – L'impression de rugosité produite dépend des coefficients d'ondelette dans les petites échelles

### 5.2.2 Cas d'une suite de fonctions

Supposons maintenant que nous avons une suite  $(f_n)_n$  de fonctions (ces fonctions pourraient être par exemple des approximations successives d'une fonction  $f$ ). On peut effectuer un raisonnement analogue au précédent : si, pour chacune des fonctions  $f_n$ , on est sensible aux gros coefficients  $\langle f_n, \psi_{jk} \rangle$  compris entre les échelles  $h(n)$  et  $n$ , où  $h$  est une fonction qui croît “très lentement” vers l'infini, la grandeur  $(\alpha_g(h(n), n, f_n))$  donne une indication sur l'impression de rugosité ressentie à l'étape  $n$ . Si la suite  $(\alpha_g(h(n), n, f_n))_n$  converge vers une limite  $l$ , ceci signifie que, pour  $n$  grand, les coefficients perçus comme “de texture” par l'utilisateur seront comparables à ceux d'une fonction d'exposant  $l$ .

Il peut donc être intéressant d'étudier la suite  $(\alpha_g(h(n), n, f_n))$ , et d'interpréter son éventuelle limite comme une “régularité asymptotique” perçue par l'utilisateur.

Le cas d'une suite de fonctions est cependant différent de celui exposé au paragraphe 5.2.1 :

- Il n'existe pas forcément de suite  $h_0$  telle que  $\alpha_g(h_0(n), n, f))_n$  converge.  
Par exemple : soit la fonction  $g_1$  définie par  $\langle g_1, \psi_{jk} \rangle = 2^{-j}$  et la fonction nulle  $g_2$ . Si on pose  $f_{2n} = g_1$  et  $f_{2n+1} = g_2$ , on voit immédiatement que, pour

tout  $h$ ,  $(\alpha_g(h(n), n, f_{2n}))_n$  vaut  $+1/2$ , alors que la suite  $(\alpha_g(h(n), n, f_{2n+1}))_n$  vaut  $+\infty$ . La suite  $(\alpha_g(h(n), n, f_n))_n$  ne converge donc pas.

La suite  $\alpha_g(h(n), n, f_n)_n$  est donc surtout intéressante à étudier lorsque la suite de fonctions  $f_n$  ne varie pas de manière trop "chaotique".

- La convergence de la suite  $\alpha_g(h_0(n), n, f_n)_n$  n'implique pas forcément celle de toute suite  $\alpha_g(h(n), n, f_n)_n$  avec  $h \leq h_0$ .

Ainsi, les suites  $\alpha_g(h(n), n, f_n)_n$  peuvent admettre plusieurs limites différentes suivant le choix des suites  $h(n)$ . Etant données les considérations de la partie précédentes, il pourrait être tentant de ne se préoccuper que des limites de  $\alpha_g(h(n), n, f_n)_n$  où  $h(n)$  est "très petit" devant  $n$ . Cependant, lorsque la suite  $\alpha_g(h(n), n, f_n)_n$  converge, elle peut toujours être interprétée comme une régularité asymptotique en tenant compte uniquement des coefficients compris entre  $h(n)$  et  $n$ .

Par exemple, nous verrons dans la partie 5.5 que, dans le cas d'un signal débruité avec le seuil universel, la suite  $\alpha_g(h(n), n, f_n)_n$  peut converger soit vers  $\alpha_g(f)$  lorsque  $h$  est suffisamment petite (ce qui correspond à se placer "loin du signal") soit vers  $+\infty$  lorsque  $h(n)$  est plus grande (ce qui correspond à se placer plus près du signal pour en évaluer la régularité). Dans ce cas, la sensation de surlissage est donc effectivement mesurée lorsqu'on considère comme des coefficients "de texture" uniquement ceux situés au-delà d'une certaine échelle.

- En général, la limite des suites  $\alpha_g(h(n), n, f_n)_n$  dépend de l'ondelette  $\psi$  choisie pour analyser la fonction.

## 5.3 Estimation de la régularité du signal échantillonné

Un problème pratique que pose l'expression (5.4) est l'évaluation des coefficients d'ondelette  $\langle f, \psi_{jk} \rangle$ . En effet, on ne connaît en pratique qu'un échantillonnage à la résolution  $2^{-n}$  de la fonction  $f$ , au moyen desquels on calcule des coefficients approchés  $\langle f_n, \psi_{jk} \rangle$ .

Le but de cette section est de montrer que, à condition de faire une hypothèse faible sur la régularité de  $f$ , nécessaire aussi pour que la relation (5.1) soit vraie, ainsi qu'une hypothèse raisonnable de "lenteur" sur  $h$ , la différence entre les

coefficients approximatés  $\langle f_n, \psi_{jk} \rangle$  et les coefficients exacts  $\langle f, \psi_{jk} \rangle$  n'empêche pas le calcul de  $\alpha_g$ . En effet, nous voulons approximer  $\alpha_g(h(n), n, f)$  par  $\alpha_g(h(n), n, f_n)$ .

### 5.3.1 Echantillonnage “impulsionnel”

Soit  $f$  une fonction dont le support est dans  $[0, 1]$ . On suppose qu'on a mesuré les valeurs de  $f$  aux points  $k2^{-n}$  pour  $k = \{0, \dots, 2^n\}$ .

#### Approximation “constante par morceaux”

Une manière envisageable de procéder (c'est la manière dont la fonction `cwt` de la Wavelet Toolbox de Matlab calcule les coefficients d'ondelettes continus) est de considérer que la fonction  $f$  est constante sur les intervalles de la forme  $[k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ . L'approximation de  $f$  constante par morceaux est alors :

$$f_n(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(i2^{-n}) 1_{t \in [i2^{-n}, (i+1)2^{-n})} \quad (5.5)$$

Les coefficients d'ondelettes approximatés, calculés avec une période d'échantillonnage de  $2^{-n}$  peuvent alors être obtenus par les mesures  $f(i2^{-n})$  :

$$\langle f_n, \psi_{jk} \rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} f_n(i2^{-n}) \int_{2^{-ni}}^{2^{-n(i+1)}} \psi_{jk}(t) dt$$

Le résultat classique suivant majore l'erreur commise sur les coefficients d'ondelette :

**Proposition 5.2.** *Soit  $\alpha > 0$ . Soit  $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$ . Soit  $f_n$  définie par l'égalité (5.5). Alors il existe  $C$  tel que :*

$$|\langle f_n, \psi_{jk} \rangle - \langle f, \psi_{jk} \rangle| \leq C * 2^{-n\alpha-j/2}$$

*Preuve.*

$$|\langle f_n, \psi_{jk} \rangle - \langle f, \psi_{jk} \rangle| \leq \sum_{i=0}^{2^n-1} \int_{2^{-ni}}^{2^{-n(i+1)}} |f(i2^{-n}) - f(t)| |\psi_{jk}(t)| dt$$

$$|\langle f_n, \psi_{jk} \rangle - \langle f, \psi_{jk} \rangle| \leq C * 2^{-n\alpha} \int_0^1 |\psi_{jk}(t)| dt$$



$$|\langle f_n, \psi_{jk} \rangle - \langle f, \psi_{jk} \rangle| \leq C * 2^{-n\alpha-j/2} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)| dt$$

□

### Approximation par projection

Les coefficients d'ondelettes discrets sont généralement calculés avec la transformée en ondelette rapide [Mal98]. Soient  $\phi$  et  $\psi$  la fonction d'échelle et l'ondelette-mère d'une analyse multi-résolution. L'approximation qu'on fait est :  $f(i2^{-n}) \simeq \langle f, 2^{n/2}\phi_{ni} \rangle$  et  $f_n \in \text{Vect}(\phi_{ni})$ , c'est à dire que :

$$f_n = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f(i2^{-n}) 2^{n/2} \phi_{ni} \quad (5.6)$$

Ceci revient à commettre ce qui a été nommé le "wavelet crime" dans [SN96] (ce problème est aussi exposé de façon claire dans [Nie98]).

Les deux propositions suivantes, bien connues, majorent l'erreur commise sur les coefficients d'ondelettes :

**Proposition 5.3.** *Soit  $\alpha \in (0, 1)$ . Soit  $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$  et  $\phi$  une fonction continue d'intégrale 1 à support borné. Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $i \in \mathbb{Z}$  :*

$$|\langle f_n, \phi_{ni} \rangle - \langle f, \phi_{ni} \rangle| \leq C 2^{-n\alpha-n/2}$$

*Preuve.*

$$f(i2^{-n}) - 2^{n/2} \langle f, \phi_{ni} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} [f(i2^{-n}) - f(2^{-n}(u+i))] \phi(u) du$$

Comme  $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$ , on peut écrire :

$$|f(i2^{-n}) - 2^{n/2} \langle f, \phi_{ni} \rangle| \leq 2^{-n\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^\alpha |\phi(u)| du.$$

□

On en déduit la proposition suivante :

**Proposition 5.4.** *Soient  $\phi$  et  $\psi$  l'ondelette-mère et la fonction d'échelle d'une analyse multi-résolution, toutes deux à supports bornés.*

Soit  $\alpha \in (0, 1)$ .

Soit  $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$ , soit  $(f_n)_n$  définie par l'égalité (5.6). Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $j \leq n$  :

$$|\langle f, \psi_{jk} \rangle - \langle f_n, \psi_{jk} \rangle| \leq C 2^{-n\alpha-j/2}$$

*Preuve.* Pour  $j = n$ , on a  $\langle f_n, \psi_{nk} \rangle = 0$ . Or,  $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$  donc il existe une constante  $C$  telle que  $|\langle f, \psi_{nk} \rangle| \leq C 2^{-n\alpha-n/2}$ .

Pour tout  $j \leq n - 1$ ,  $\psi_{jk} \in \text{Vect}\{\phi_{ni} : i \in \mathbb{Z}\}$  donc :

$$\langle f_n, \psi_{jk} \rangle - \langle f, \psi_{jk} \rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \langle \langle f_n - f, \phi_{ni} \rangle \phi_{ni}, \psi_{jk} \rangle$$

D'après le proposition 5.3 :

$$|\langle f, \psi_{jk} \rangle - \langle f_n, \psi_{jk} \rangle| \leq C 2^{-n/2-n\alpha} \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\langle \phi_{ni}, \psi_{jk} \rangle|$$

$$|\langle f, \psi_{jk} \rangle - \langle f_n, \psi_{jk} \rangle| \leq C 2^{-n/2-n\alpha} \sum_{i \in \mathbb{Z}} 2^{n/2} \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(2^n t - i) \psi_{jk}(t)| dt$$

Or,  $\phi$  est à support borné, donc  $t \rightarrow \sum_{i \in \mathbb{Z}} |\phi(2^n t - i)|$  est majorée par un réel  $M$ . On en déduit :

$$|\langle f, \psi_{jk} \rangle - \langle f_n, \psi_{jk} \rangle| \leq C 2^{-n\alpha} M \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{jk}(t)| dt$$

$$|\langle f, \psi_{jk} \rangle - \langle f_n, \psi_{jk} \rangle| \leq C 2^{-j/2-n\alpha} M \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(t)| dt$$

□

## Calcul approché des coefficients d'ondelettes et régularité Höldérienne

Supposons par exemple que les coefficients de  $f$  sont :  $\langle f, \psi_{jk} \rangle = 2^{-j\alpha_0-j/2}$ . Alors  $f$  appartient à  $C^{\alpha_0}(\mathbb{R})$  et l'erreur faite sur un coefficient est plus petite que  $C 2^{-n\alpha_0-j/2}$ .

Aux plus grandes échelles ( $j \ll n$ ), l'erreur, plus petite que  $2^{-n\alpha_0-j/2}$  est négligeable comparée aux coefficients exacts  $2^{-j\alpha_0-j/2}$ . Les coefficients approximés et les coefficients exacts ont donc le même ordre de grandeur. Ainsi, à condition

d'inclure des coefficients des grandes échelles ( $h(n)$  suffisamment lente), l'exposant de Hölder "calculé" va être inférieur ou égal à l'exposant de Hölder de la fonction  $f$ .

Aux petites échelles ( $j \approx n$ ), l'erreur peut être du même ordre que les coefficients, mais pas plus : le coefficient approximé  $\langle f_n, \psi_{jk} \rangle$  reste ainsi plus petit en valeur absolue que  $(C + 1) \langle f, \psi_{jk} \rangle$ . Les coefficients des petites échelles ne vont pas être trop grands, et l'exposant de Hölder "calculé" sera supérieur ou égal à l'exposant de Hölder de la fonction  $f$ .

Les théorèmes 5.1 et 5.2 développent de manière plus précise ces considérations euristiques, en particulier les conditions sur  $h(n)$ .

**Théorème 5.1.** *Soit  $f \in C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$ ,  $\epsilon_0 > 0$ . Soit  $f_n$  son approximation à la résolution  $2^{-n}$  par l'équation 5.6 (ou 5.5). Si il existe  $r < 1$  tel que  $h(n) \leq r.n$ , alors :*

$$\alpha_g(f) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \alpha_g(h(n), n, f_n) \quad (5.7)$$

*Preuve.* Pour  $\alpha < \alpha_g(f)$ ,  $f \in C^\alpha(\mathbb{R})$ . On en déduit d'après la proposition 5.2,  $|\langle f_n, \psi_{jk} \rangle - \langle f, \psi_{jk} \rangle| \leq C_1 2^{-n\alpha-j/2}$ . De plus,  $|\langle f, \psi_{jk} \rangle| \leq C_2 2^{-j(\alpha+1/2)}$ , donc

$$|\langle f_n, \psi_{jk} \rangle| \leq (C_1 + C_2) 2^{-j(\alpha+1/2)}.$$

On en déduit que

$$1/2 + \alpha \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{j \in h(n) \dots n, k \in \mathbb{Z}} \frac{\log |\langle f_n, \psi_{jk} \rangle|}{-j}.$$

Ceci étant vrai pour tout  $\alpha < \alpha_g(f)$ , on obtient une première inégalité.

De plus, pour tout  $\eta$  assez petit pour avoir  $r < \frac{\alpha_g(f) - \eta}{\alpha_g(f) + \eta}$ , considérons une suite  $(j_l, k_l)$  telle que :

$$\begin{cases} j_l \rightarrow \infty \\ |\langle f, \psi_{j_l, k_l} \rangle| \geq 2.2^{-j_l(\alpha_g(f) + \eta + 1/2)} \end{cases}$$

et posons  $n_l = \lceil j_l \frac{\alpha_g(f) + \eta}{\alpha_g(f) - \eta} \rceil$ .

Comme  $h(n_l) \leq r.n_l$ , il existe  $L$  tel que, pour tout  $l \geq L$ ,  $h(n_l) \leq j_l \leq n_l$ , si bien que

$$1/2 + \alpha_g(h(n_l), n_l, f) \leq \frac{\log |\langle f_{n_l}, \psi_{j_l k_l} \rangle|}{-j_l}.$$

On en déduit :

$$|\langle f_{n_l}, \psi_{j_l k_l} \rangle| \geq 2^{-j_l(\alpha_g(f) + \eta + 1/2)}$$

Or,  $f \in C^{\alpha_g(f) - \eta/2}(\mathbb{R})$ , ce qui fait que nous pouvons minorer  $|\langle f_{n_l} - f, \psi_{j_l k_l} \rangle|$  en utilisant la proposition 5.2 :

$$|\langle f_{n_l}, \psi_{j_l k_l} \rangle| \geq |\langle f, \psi_{j_l k_l} \rangle| - C.2^{-n_l(\alpha_g(f) - \eta/2) - j_l/2}.$$

Dès que  $C.2^{-n_l(\alpha_g(f) - \eta/2)} \leq \frac{1}{2}2^{-n_l(\alpha_g(f) - \eta)} \leq \frac{1}{2}2^{-j_l(\alpha_g(f) + \eta)}$ , on a donc :

$$|\langle f_{n_l}, \psi_{j_l k_l} \rangle| \geq \frac{1}{2}2^{-j_l(\alpha_g(f) + \eta + 1/2)}$$

Finalement,  $\alpha_g(h(n_l), n_l, f) \leq \alpha_g(f) + \eta$  et l'inégalité vient en passant à la  $\liminf$ .

□

Le théorème 5.1 implique que, si  $h(n) \leq r.n$  avec  $r < 1$  et si  $\alpha_g(h(n), n, f_n)$  converge, alors sa limite est  $\alpha_g(f)$ . Ainsi, la suite  $\alpha_g(h(n), n, f_n)$  ne va pas converger vers une "fausse valeur". D'un autre côté, la question restante est "peut-on trouver une condition simple sur  $h$  pour que cette suite converge" ?

Etant donnée une fonction  $f$ , il existe toujours une fonction  $h_0$  telle que la suite  $\alpha_g(h_0(n), n, f)$  converge. La proposition suivante montre qu'il est suffisant de choisir  $h$  "un peu plus lent" que  $h_0$  pour que la suite  $\alpha_g(h(n), n, f_n)$  tende vers  $\alpha_g(f)$ . Ainsi, le comportement des suites  $(\alpha_g(h(n), n, f_n))_n$  est assez similaire au comportement des suites  $(\alpha_g(h(n), n, f))_n$  : la fonction  $h$  doit être "suffisamment lente" pour que la suite  $(\alpha_g(h(n), n, f_n))_n$  converge vers  $\alpha_g(f)$ .

**Théorème 5.2.** Soit  $f \in C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$ ,  $\epsilon_0 > 0$  et  $f_n$  son approximation à la résolution  $2^{-n}$ .

Soit  $h_0 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  croissante telle que  $\alpha_g(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_g(h_0(n), n, f)$ .

Alors, pour toute suite d'entiers  $u_n$  telle que  $u_n \leq r.n$  avec  $r < 1$ , pour toute fonction  $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  croissante et telle que  $h(n) \leq h_0(u_n)$  :

$$\alpha_g(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_g(h(n), n, f_n)$$

*Preuve.* Tout d'abord, nous pouvons minorer  $\alpha_g(h(n), n, f)$  en utilisant la pro-

position 5.2 comme dans le théorème 5.1 : pour tout  $\eta > 0$

$$|\langle f_n, \psi_{jk} \rangle| \leq (C_1 + C_2)2^{-j(\alpha_g(f) - \eta + 1/2)}$$

donc  $\alpha_g(f) - 2\eta \leq \alpha_g(h(n), n, f)$  pour  $n$  assez grand.

La majoration de cette suite suit aussi les mêmes lignes que dans le théorème 5.1 : pour tout  $\eta > 0$ , il existe une suite  $(j_l, k_l)$  telle que

$$|\langle f, \psi_{j_l, k_l} \rangle| \geq 2.2^{-j_l(\alpha_g(f) + \eta + 1/2)}$$

et, pour tout  $l \in \mathbb{N}$ ,  $j_l \geq h_0(j_{l+1} - 1)$ .

Maintenant, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , considérons  $j_{l(n)}$  tel que  $u_n \in [j_{l(n)}, j_{l(n)+1} - 1]$ . Alors :  $h(n) \leq h_0(u_n) \leq h_0(j_{l(n)+1} - 1) \leq j_{l(n)} \leq u_n$ . Ainsi,  $j_{l(n)} \in [h(n), u_n]$ . Comme  $u_n < n$ , ceci implique

$$1/2 + \alpha_g(h(n), n, f) \leq \frac{\log |\langle f_n, \psi_{j_{l(n)}k_{l(n)}} \rangle|}{-j_{l(n)}}.$$

Enfin,  $f \in C^{\alpha_g(f) - \eta}(\mathbb{R})$ , si bien que nous pouvons minorer  $|\langle f_n, \psi_{j_{l(n)}k_{l(n)}} \rangle|$  en utilisant la proposition 5.2 :  $n \geq r^{-1} \cdot j_{l(n)}$ , donc

$$|\langle f_n, \psi_{j_{l(n)}k_{l(n)}} \rangle| \geq 2.2^{-j_{l(n)}(\alpha_g(f) + \eta + 1/2)} - C.2^{-r^{-1} \cdot j_{l(n)}(\alpha_g(f) - \eta + 1/2)}.$$

Dès que  $\eta < \frac{1-r}{1+r}(\alpha_g(f) + 1/2)$ , il vient  $\alpha_g(f) + \eta + 1/2 < r^{-1} \cdot (\alpha_g(f) - \eta + 1/2)$  et, pour  $n$  assez grand

$$|\langle f_n, \psi_{j_{l(n)}k_{l(n)}} \rangle| \geq 2^{-j_l(\alpha_g(f) + \eta + 1/2)}.$$

Pour conclure, nous avons  $\alpha_g(h(n), n, f) \leq \alpha_g(f) + \eta$  pour  $n$  assez grand et le résultat s'ensuit.  $\square$

Ainsi, une fonction  $f \in C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$  étant donnée, on peut toujours choisir  $h$  qui tend assez lentement vers  $+\infty$  pour que les deux suites

$$\left( \min_{j \in h(n) \dots n, k \in \mathbb{Z}} \frac{\log |\langle f_n, \psi_{jk} \rangle|}{-j} \right)_n \quad \text{et} \quad \left( \min_{j \in h(n) \dots n, k \in \mathbb{Z}} \frac{\log |\langle f, \psi_{jk} \rangle|}{-j} \right)_n$$

convergent vers  $\alpha_g(f) + 1/2$ . De plus, c'est la seule limite possible de ces suites,

dès que l'on choisit  $h(n)$  plus petit que  $r.n$  avec  $r < 1$ .

Remarquons que, d'un point de vue pratique, il serait préférable d'utiliser la transformée en ondelettes continue plutôt que la transformée en ondelettes discrète, afin de calculer de manière stable l'exposant de Hölder ponctuel. Cependant, dans le cadre du débruitage, la transformée en ondelettes discrète a l'avantage de permettre la reconstruction. C'est la raison pour laquelle nous nous occupons de la DWT au lieu de la CWT.

### 5.3.2 Echantillonnage “intégral”

On suppose toujours que  $f$  est dans  $C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$ .

Une manière plus réaliste de voir l'échantillonnage, qui est exposée par exemple dans [GV67], et qui sera utile dans la partie suivante est celle-ci : on ne mesure pas la valeur exacte de  $f$  à l'instant  $k2^{-n}$ , mais seulement une “valeur moyenne”, mesurée par un capteur dont la résolution temporelle est  $2^{-n}$ . Ainsi, les mesures effectuées sont les  $\int f(t)c(2^nt - i)2^n dt$ , où  $c$  est une fonction positive, d'intégrale 1, dont le support est inclus dans  $[0, 1]$  (les intervalles de mesure ne se recoupent pas) et qui caractérise l'appareil de mesure.

En remarquant que, d'après le théorème de la valeur moyenne, pour tout  $n$  et pour tout  $i$ , il existe un réel  $t_n^i \in [i2^{-n}, (i+1)2^{-n}]$  tel que

$$f(t_n^i) = \int f(t)c(2^nt - i)2^n dt$$

et qu'on peut refaire les démonstrations de la partie 5.3.1 en remplaçant  $f(i2^{-n})$  par  $f(t_n^i)$ , les propositions 5.2 et 5.4 ainsi que les théorèmes 5.1 et 5.2 de cette partie sont également valables en remplaçant les  $f(i2^{-n})$  par les mesures  $\int f(t)c(2^nt - i)2^n dt$ .

## 5.4 Estimation de la régularité d'un signal bruité

Considérons un signal  $f$  dans  $C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$ , bruité par un bruit blanc gaussien. On suppose l'écart-type  $\sigma_0$  du bruit connu. Quitte à diviser le signal observé par  $\sigma_0$  et à remplacer  $f/\sigma_0$  par  $f$ , on peut supposer que l'écart-type du bruit vaut 1.

On mesure donc un signal bruité

$$g = f + B$$

où  $B$  est un bruit blanc continu, gaussien, d'écart-type 1.

Le but de cette section est d'évaluer la régularité du signal bruité.

Il n'est plus possible de considérer les valeurs de  $g$  aux points  $\{k2^{-n}, k \in \mathbb{Z}\}$ . En effet,  $g$  est une distribution.

Les considérations suivantes, exposées par exemple dans [GV67] nous permettent de définir plus précisément l'opération effectuée lorsqu'on échantillonne la distribution  $g$ .

Supposons que  $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  est un signal mesuré par un capteur dont la résolution temporelle est  $2^{-n}$ . Dans ce cas, on n'a pas accès à  $g$ , mais seulement à sa "valeur moyenne"  $\int g(t)c(2^nt - k)2^n dt$ , où  $c$  est une fonction positive, d'intégrale 1, dont le support est inclus dans  $[0, 1]$  (les intervalles de mesure ne se recoupent pas) et qui caractérise l'appareil de mesure (par exemple,  $c(t) = 1_{t \in [0,1]}$ ).

Les mesures effectuées sont donc les

$$g_n^i = \int f(t)c(2^nt - k)2^n dt + 2^{n/2}b_n^i$$

où les  $b_n^i$  sont i.i.d. et  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

D'après les résultats de la partie 5.3.2, les coefficients d'ondelette approchés sont :

$$\langle g_n, \psi_{jk} \rangle = \langle f_n, \psi_{jk} \rangle + 2^{-n/2}b_{jk}^n. \quad (5.8)$$

avec  $|\langle f_n, \psi_{jk} \rangle - \langle f, \psi_{jk} \rangle| \leq 2^{-n/2-j\epsilon_0}$  et les  $b_{jk}^n$  i.i.d. et  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Deux lemmes seront utiles dans la démonstration du théorème 5.3, mais également par la suite.

**Lemme 5.1.** *Soit  $f$  un signal dans  $C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$  avec  $\epsilon_0 > 0$ . Soit  $g_n$  le signal bruité défini par l'équation 5.8.*

*Soit  $k(n)$  une suite.*

*Pour tout  $\epsilon > 0$ , presque sûrement, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  :*

$$|\langle g_n, \psi_{nk(n)} \rangle| \geq 2^{-n(\epsilon+1/2)}$$

*Preuve.*

$$P(|\langle g_n, \psi_{nk(n)} \rangle| < 2^{-n(\epsilon+1/2)}) = P(|b_{nk(n)}^n - \langle g_n, \psi_{nk(n)} \rangle| \leq 2^{-n\epsilon})$$

$$P(|\langle g_n, \psi_{nk(n)} \rangle| < 2^{-n(\epsilon+1/2)}) \leq \sqrt{2/\pi} \cdot 2^{-n\epsilon}.$$

Comme  $\sum 2^{-n\epsilon}$  converge, le resultat est démontré.  $\square$

**Lemme 5.2.** *Soit  $\epsilon > 0$ . Soient  $b_{jk}^n$  des variables i.i.d et  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Presque sûrement, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  :*

$$\max_{j \in [1..n], k \in [0..2^j]} |b_{jk}^n| \leq 2^{n\epsilon}$$

*Preuve.* Soit  $E_n$  cet évènement.  $P(E_n) = \text{erf}(2^{n\epsilon})^{2^{n+1}}$ . En utilisant l'inégalité bien connue (voir par exemple [AS70]) :  $\text{erf}(x) \geq 1 - \frac{\exp(-\frac{x^2}{2})}{x\sqrt{2\pi}}$ , puis  $(1-a)^b \geq \exp(-ab)$  :

$$P(E_n) \geq \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{(1-\epsilon)n} \exp(-2^{-2n\epsilon-1})\right).$$

On en déduit que  $P(\overline{E_{n-1}}) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot 2^{(1-\epsilon)n} \exp(-2^{-2n\epsilon-1}) \leq \exp(-2^{-n\epsilon})$  pour  $n$  assez grand. Le résultat en découle par la convergence de  $\sum_n \exp(-2^{-n\epsilon})$   $\square$

**Théorème 5.3.** *Soit  $f$  un signal dans  $C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$  avec  $\epsilon_0 > 0$ . Soit  $g_n$  le signal bruité défini par l'équation (5.8).*

*Pour toute fonction  $h(n) \leq n$  croissante qui tend vers  $+\infty$ ,  $\alpha_g(h(n), n, g_n)$  tend presque sûrement vers 0.*

*Preuve.* Pour tout  $\epsilon > 0$ , le lemme 5.1 nous donne immédiatement que presque sûrement,

$$\frac{\log |\langle g_n, \psi_{n0} \rangle|}{-n} \leq \epsilon + \frac{1}{2}$$

pour  $n$  assez grand, ce qui implique  $\alpha_g(h(n), n, f) \leq \epsilon$ .

Il reste à prouver que, presque sûrement,  $\alpha_g(h(n), n, f) \geq -\epsilon$  pour  $n$  assez grand.

D'après le théorème 5.1, il existe  $N_1$  tel que pour tout  $n \geq N_1$  et pour tout  $j \geq h(n)$ ,  $|\langle f_n, \psi_{jk} \rangle| \leq C 2^{-j(\epsilon_0+1/2)}$ .

De plus, il existe  $N_2$  tel que pour tout  $n \geq N_2$  et pour tout  $j \geq h(n)$  :  $C 2^{-j(\epsilon_0+1/2)} \leq 1/2 \cdot 2^{-j(-\epsilon+1/2)}$ .



Donc, pour tout  $n \geq \max(N_1, N_2)$  et pour tout  $j \geq h(n)$  :

$$|\langle f, \psi_{jk} \rangle| \leq 1/2 \cdot 2^{-j(-\epsilon+1/2)}.$$

Or, d'après le lemme 5.1, presque sûrement, il existe  $N_3$  tel que pour tout  $n \geq N_3$ ,  $j > h(n)$  implique

$$\max_{j \in h(n) \dots n, k=0 \dots 2^j} 2^{-n/2} |b_{jk}^n| \leq 1/2 \cdot 2^{-n(-\epsilon+1/2)} \leq 1/2 \cdot 2^{-j(-\epsilon+1/2)}.$$

On en déduit que pour tout  $j \geq \max(N_1, N_2, N_3)$  :  $|\langle f_n, \psi_{jk} \rangle| \leq 1/2 \cdot 2^{-j(-\epsilon+1/2)}$ .  $\alpha_g(h(n), n, f_n) \geq \epsilon$ , d'où le résultat.  $\square$

On peut faire la remarque suivante : en appliquant le théorème 5.3 avec  $f = 0$ , on obtient que, pour un bruit blanc,  $\alpha_g(h(n), n, b_n)$ , où  $b_n$  est le bruit blanc "échantillonné" à la résolution  $2^{-n}$ , tend presque sûrement vers 0. Or, presque sûrement, l'exposant de Hölder global  $\alpha_g(b)$  d'un bruit blanc est  $-1/2$ . Quelle que soit la fonction  $h$ , la suite  $\alpha_g(h(n), n, b_n)$  ne tend pas vers  $\alpha_g(b)$ . Ceci pourrait sembler contradictoire avec le théorème 5.2. Cependant, un bruit blanc n'est évidemment pas dans  $C^\epsilon(\mathbb{R})$  et il n'y a donc pas de raison pour que son irrégularité estimée tende vers son irrégularité réelle.

Ce théorème a également une interprétation intuitive : quand un signal est bruité, l'irrégularité du bruit "tue" l'irrégularité du signal, et la régularité estimée du signal bruité vaut 0, quelle que soit la régularité du signal original.

## 5.5 Estimation de la regularité de signaux obtenus par seuillage

### 5.5.1 Effet d'un seuillage en $2^{-n/2} \sqrt{2n \ln 2}$

#### Etude théorique

Dans la section précédente, nous nous sommes intéressés à la régularité d'un signal bruité. Maintenant, nous étudions l'effet du seuillage dur.

**Théorème 5.4.** *Soit  $f$  un signal dans  $C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$  avec  $\epsilon_0 > 0$ . Soit  $g_n$  le signal bruité défini par l'équation (5.8). Soit  $\tilde{f}_n$  le signal débruité par la méthode du seuillage*

dur, avec le seuil :  $\lambda_n = 2^{-n/2} \sqrt{2n \ln 2}$  :

$$\langle \tilde{f}_n \rangle = \begin{cases} \langle g_n, \psi_{jk} \rangle & \text{si } |\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| > \lambda_n \\ 0 & \text{si } |\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| \leq \lambda_n \end{cases}$$

Soit  $\sigma$  croissante, telle que  $\alpha_g(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_g(\sigma(n), f)$ . Alors, si  $h$  vérifie :

$$\exists \epsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists i \in \mathbb{N} : \sigma(i) \in \left[ h(n) \dots \frac{n}{1 + 2\alpha_g(f)} (1 - \epsilon_0) \right] \quad (5.9)$$

alors :  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend en probabilité vers  $\alpha_g(f)$ .

En revanche, si  $h$  vérifie :

$$\exists \epsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : h(n) \geq \frac{n}{1 + 2\alpha_g(f)} (1 + \epsilon_0) \quad (5.10)$$

alors :  $\alpha_g(h(n), n, g_n)$  tend en probabilité vers  $+\infty$ .

Intuitivement parlant, on sait que les coefficients  $\langle f, \psi_{jk} \rangle$  de la fonction  $f$  sont plus petits en valeur absolue que  $2^{-j(\alpha_g(f)+1/2)}$ . Le bruit étant de l'ordre de  $2^{-n/2}$ , les coefficients de  $f$  sont “noyés dans le bruit” quand  $j$  est supérieur à  $n/(2\alpha_g(f)+1)$ . On montre dans un premier temps (lemme 5.3) que les coefficients correspondant à ces valeurs de  $j$  sont seuillés.

En revanche, dans les échelles d'indice  $j$  inférieur à cette coupure, le bruit sera petit devant  $2^{-j(\alpha_g(f)+1/2)}$ , ce qui fait que l'adjonction de bruit ne pourra pas rendre un coefficient plus grand que  $2^{-j(\alpha_g(f)+1/2)}$  (lemme 2).

Enfin, il existe des coefficients de l'ordre de  $2^{-j(\alpha_g(f)+1/2)}$ . Lorsqu'on peut en trouver entre  $h(n)$  et la valeur de coupure (équation (5.9)), le bruit sera petit devant ces coefficients et l'adjonction de bruit ne va pas diminuer notablement leur valeur absolue (lemme 3).

On obtient le théorème 5.4 en récapitulant ces trois lemmes : le lemme 1 assure que les coefficients après la coupure sont seuillés (on en déduit que  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend en probabilité vers  $+\infty$  quand l'équation (5.10) est vérifiée), le lemme 2 que les coefficients avant la coupure restent plus petits que  $2^{-j(\alpha_g(f)+1/2)}$ . La suite  $\alpha_g(h(n), n, g_n)$  va donc rester supérieure à  $\alpha_g(f)$ . Enfin, le lemme 3 assure que, s'il existe une suite de coefficients de l'ordre de  $2^{-j(\alpha_g(f)+1/2)}$  avec  $j$  compris entre  $h(n)$  et l'échelle de coupure, alors ces coefficients gardent le même ordre de grandeur.

Finalement, ce théorème peut être interprété ainsi : il existe deux cas où le comportement de la suite  $\alpha_g(h(n), n, g_n)$  est prévisible :

- Si  $h(n) < \sigma(i) < \frac{n(1-\epsilon_0)}{1+2\alpha_g(f)}$ .

On se place "loin" du signal. Des valeurs de la suite  $\sigma$  viennent s'intercaler entre  $h(n)$  et  $\frac{n}{1+2\alpha_g(f)}$ . Les coefficients correspondants du signal débruité sont du même ordre de grandeur que ceux du signal original, et  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n)$  est proche de  $\alpha_g(f)$ .

- Si  $\frac{n(1+\epsilon_0)}{1+2\alpha_g(f)} < h(n)$ .

On se place "près" du signal. Tous les coefficients du signal débruité aux échelles d'indice  $j \geq h(n)$  sont nuls, et  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n)$  vaut  $+\infty$  (on observe un signal très lisse). Ce cas correspond à l'impression de "surlissage".

- Les autres cas correspondent au cas "dégénéré" où  $h(n)$  est plus petit que  $\frac{n}{1+2\alpha_g(f)}$ , mais assez proche pour qu'aucun terme de la suite  $\sigma$  ne s'intercale entre  $h(n)$  et  $\frac{n}{1+2\alpha_g(f)}$ . La connaissance de  $\alpha_g(f)$  ne permet pas alors de prédire le comportement de  $\alpha_g(h(n), n, g_n)$ .

On peut faire des hypothèses sur  $\sigma$  pour limiter ces cas. Par exemple, si  $\sigma(i) = O(i)$ , alors le cas dégénéré se limite à :  $h(n)$  est de l'ordre de  $\frac{n}{1+2\alpha_g(f)}$  pour une infinité d'indices  $n$ .

Le fait suivant est une très légère généralisation du résultat classique qu'on peut trouver dans [LLR83] (ce résultat est :  $P(\max |z_i| \leq 2n \ln 2) \rightarrow 1$ ) :

**Fait 5.1.** Soit  $\epsilon_n > 0$  tel que  $\epsilon_n = o(n)$ . Soit  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i.i.d. et  $\mathcal{N}(0, 1)$ . Alors :

$$P\left(\max_{i \in [1 \dots 2^n]} |z_i| \leq \sqrt{2n \ln 2 - \ln \epsilon_n}\right) \rightarrow 1$$

*Preuve.* Soit  $E_n$  cet évènement.  $P(E_n) = (\text{erf} \sqrt{2n \ln 2 - \ln \epsilon_n})^{2^n}$ .

En utilisant  $\text{erf}(x) \geq 1 - \frac{\exp(-\frac{x^2}{2})}{\sqrt{2\pi}x}$  et  $(1-a)^b \geq \exp(-ab)$ , on en déduit :  $P(E_n) \geq \exp\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\epsilon_n}{2n \ln 2 - \ln \epsilon_n}}\right)$ . Le résultat s'en déduit par l'hypothèse  $\epsilon_n = o(n)$ .  $\square$

**Lemme 5.3.** Pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$P\left(\forall j \geq \frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1+\epsilon) \quad : \quad \langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle = 0\right) \rightarrow 1$$

*Preuve.* Soit  $\eta$  assez petit pour que  $(1+\epsilon)^{\frac{\alpha_g(f)+1/2-\eta}{\alpha_g(f)+1/2}} > 1$ . Ceci implique que,

pour  $n \geq N_1$ ,

$$\frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1+\epsilon)(\alpha_g(f)+1/2-\eta) \geq \frac{n+\ln(8n\ln 2)}{2}.$$

Or, d'après le théorème 5.1, il existe  $N_2$  tel que pour  $n \geq N_2$ , pour  $j \geq \frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1+\epsilon)$  et pour tout  $k$  :

$$\begin{aligned} |\langle f_n, \psi_{jk} \rangle| &\leq 2^{-j(\alpha_g(f)+1/2-\eta)} \\ &\leq 2^{-\frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1+\epsilon)(\alpha_g(f)+1/2-\eta)} \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout  $n \geq \max(N_1, N_2)$ , pour tout  $j \geq \frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1+\epsilon)$  et pour tout  $k$  :

$$\begin{aligned} |\langle f_n, \psi_{jk} \rangle| &\leq 2^{-\frac{n+\log(8n\ln 2)}{2}} \\ &\leq \frac{2^{-n/2}}{2\sqrt{2n\ln 2}} \\ &\leq 2^{-n/2}\sqrt{2n\ln 2} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n\log 2}\right)^{1/2}\right) \\ &\leq \lambda_n - 2^{-n/2}\sqrt{2n\ln 2 - 1} \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le fait 5.1 avec  $\epsilon_n = e$ , il vient

$$P\left(\forall j \in 1..n, k \in 1..2^j : |b_{jk}^n| \leq 2^{-n/2}\sqrt{2n\ln 2 - 1}\right) \rightarrow 1.$$

On en déduit :

$$P\left(\forall j \geq \frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1+\epsilon), k \in 1..2^j : |\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| \leq \lambda_n\right) \rightarrow 1$$

et le résultat.  $\square$

**Lemme 5.4.** *Pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que, pour toute suite  $h(n)$  qui tend vers l'infini il existe presque sûrement  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  :*

$$\forall j \in \left[h(n) \dots \frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1+\epsilon)\right] \quad : \quad \left|\langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle\right| \leq 2^{-j(\alpha_g(f)+1/2-\eta)}$$

*Preuve.* Soit  $\eta > 0$ . Soit  $\epsilon$  tel que  $\frac{1+\epsilon}{1+2\alpha_g(f)} \cdot (\alpha_g(f) + 1/2 - \eta) = 1/2 - \gamma$ , où  $\gamma > 0$ .

Alors, pour tout  $j \leq \frac{(1+\epsilon)n}{1+2\alpha_g(f)}$  :

$$2^{-j(\alpha_g(f)+1/2-\eta)} \geq 2^{-n/2} \cdot 2^{\gamma \cdot n}.$$

Par le lemme 5.2, on en déduit que presque sûrement, il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_1$  :

$$2^{-n/2} |b_{jk}^n| \leq 1/2 \cdot 2^{-j(\alpha_g(f)+1/2-\eta)}.$$

De plus, d'après le lemme 5.1, il existe  $N_2$  tel que, pour tout  $n \geq N_2$ , pour tout  $j \geq h(n)$  :  $|\langle f_n, \psi_{jk} \rangle| \leq 1/2 \cdot 2^{-j(\alpha_g(f)+1/2-\eta)}$ . On en déduit par définition de  $g_n$  que, pour tout  $n \geq \max(N_1, N_2)$  :

$$\forall j \in \left[ h(n) \dots \frac{n}{1+2\alpha_g(f)} (1+\epsilon) \right] \quad : \quad |\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| \leq 2^{-j(\alpha_g(f)+1/2-\eta)} \quad (5.11)$$

On conclut en remarquant que  $|\langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle| \leq |\langle g_n, \psi_{jk} \rangle|$ . □

**Lemme 5.5.** *Si l'équation (5.9) est vérifiée, alors pour tout  $\eta > 0$ , presque sûrement, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq N$ , il existe  $j_n \in \left[ h_n \dots \frac{n}{1+2\alpha_g(f)} (1-\epsilon_0) \right]$  et  $k_n \in [0..2^{j_n}]$  tels que :*

$$|\langle \tilde{f}_n, \psi_{j_n k_n} \rangle| \geq 2^{-j_n(1/2+\alpha_g(f)+\eta)}$$

*Preuve.* Soit  $(j_n, k_n)$  une suite telle que  $j_n \in \left[ h_n \dots \frac{n}{1+2\alpha_g(f)} (1-\epsilon_0) \right]$  et  $\alpha_g(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\langle f, \psi_{j_n k_n} \rangle|}{j_n} + 1/2$ . Choisissons  $\eta > 0$  suffisamment petit pour avoir :  $(1-\epsilon_0)(1 + \frac{\eta}{1/2+\alpha_g(f)}) = 1 - 2\gamma$  où  $\gamma > 0$ . Pour  $n$  assez grand

$$\begin{aligned} |\langle f, \psi_{j_n k_n} \rangle| &\geq 3 \cdot 2^{-j_n \alpha_g(f) + 1/2 + \eta} \\ &\geq 3 \cdot 2^{-n/2 + \gamma \cdot n}. \end{aligned}$$

D'après la proposition 5.4, il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $n$  :

$$|\langle f, \psi_{j_n k_n} \rangle - \langle f_n, \psi_{j_n k_n} \rangle| \leq C 2^{-n\epsilon_0/2 - j_n/2}.$$

Or, pour  $n$  assez grand,  $C 2^{-n\epsilon_0/2} \leq 2^{\gamma n}$ , donc :  $|\langle f, \psi_{j_n k_n} \rangle - \langle f_n, \psi_{j_n k_n} \rangle| \leq 2^{-n/2 + \gamma n}$ . Il vient :

$$|\langle f_n, \psi_{j_n k_n} \rangle| \geq 2 \cdot 2^{-n/2 + \gamma \cdot n}.$$

On en déduit grâce au lemme 5.2, que, presque sûrement, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$  :  $2^{-n/2} |b_{j_n k_n}^n| \leq 1/2 \cdot |\langle f_n, \psi_{j_n k_n} \rangle|$ , si bien que

$$|\langle g_n, \psi_{j_n k_n} \rangle| \geq 2^{-j_n(\alpha_g(f)+1/2+\eta)}.$$

Supposons cet évènement réalisé et remarquons que  $2^{-j_n(\alpha_g(f)+\frac{1}{2}+\eta)} \geq 2^{-n/2+\gamma \cdot n} > \lambda_n$  pour  $n$  assez grand : les coefficients d'ondelette  $\langle g_n, \psi_{j_n k_n} \rangle$  ne sont pas seuillés et  $|\langle \tilde{f}_n, \psi_{j_n k_n} \rangle| \geq 2^{-j_n(\alpha_g(f)+1/2+\eta)}$ .  $\square$

*Démonstration du théorème 5.4 :*

- Si  $h$  vérifie (5.9) : soit  $\eta > 0$ . Par le lemme 5.4, il existe  $\epsilon$  tel que

$$P \left( \forall j \in \left[ h(n) \cdots \frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1+\epsilon) \right] : \frac{\log |\langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle|}{-j} \geq \alpha_g(f) + 1/2 - \eta \right) \rightarrow 1.$$

Par le lemme 5.3 ,

$$P \left( \forall j \in \left[ \frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1+\epsilon) \cdots n \right] : \frac{\log |\langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle|}{-j} \geq \alpha_g(f) + 1/2 - \eta \right) \rightarrow 1.$$

Ainsi, on peut déduire que

$$P(\alpha_g(h(n), n, g_n) \geq \alpha_g(f) + 1/2 - \eta) \rightarrow 1.$$

Finalement, le lemme 5.5 nous permet de dire que

$$P(\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n) \leq \alpha_g(f) + 1/2 + \eta) \rightarrow 1,$$

d'où le résultat.

- Si  $h$  vérifie (5.10) : d'après le lemme 5.3 :

$$P \left( \forall j \geq \frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1+\epsilon) : \langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle = 0 \right) \rightarrow 1.$$

On en déduit :  $P(\forall j \in [h(n)..n] : \langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle = 0) \rightarrow 1$  donc  $P(\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n) = +\infty) \rightarrow 1$

## Applications numériques

Sur les figures 5.2, 5.3, 5.4 et 5.5, on étudie le comportement de signaux débruités obtenus lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

On peut vérifier “de visu” les lemmes 5.3, 5.4 et 5.5. Au delà d’une certaine échelle (l’échelle de coupure  $\frac{n}{1+2\alpha_g(f)}$ ), tous les coefficients sont seuillés (lemme 5.3). Pour  $j$  situé avant la coupure, le bruit est beaucoup plus petit que  $2^{-j(\alpha_g(f)+1/2)}$ . Tous les coefficients restent donc inférieurs à  $2^{-j(\alpha_g(f)+1/2)}$  (lemme 5.4). De plus, les plus gros coefficients, de l’ordre de  $2^{-j(\alpha_g(f)+1/2)}$  gardent le même ordre de grandeur et le logarithme de leur valeur absolue est très peu modifié (lemme 5.5).

On a donc une suite de signaux qui converge vers la fonction initiale. Cependant, ces signaux donnent l’impression de rester plus réguliers que le signal original.

Ceci peut être mis en rapport avec le théorème 5.4. Si on considère que tous les coefficients sont interprétés comme des coefficients de texture, on sait que la suite  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend vers  $\alpha_g(f)$  : on imagine aisément que, si on reste “assez loin” de la fonction pour  $N$  grand, les signaux reconstruits vont finir par donner la même impression de rugosité que les signaux initiaux.

En revanche, si on fait l’hypothèse que seules les échelles d’indice  $j$  pour  $j \geq \lambda.n$ , où  $\lambda > 1/(1 + 2\alpha_g(f))$  sont perçues comme participant à la texture de la fonction (ceci correspondrait au fait qu’on zoome sur la fonction au fur et à mesure que la résolution augmente), alors les fonctions obtenues après seuillage seront perçues comme lisses (on a pour tout  $n$  :  $\alpha(h(n), n, f_n) = +\infty$  si  $h(n) \geq \lambda.n$ ). En effet, tous les coefficients dans les petites échelles (pour  $j \geq \lambda.n$  avec  $\lambda > 1/(1 + 2\alpha_g(f))$ ) sont seuillés.

### 5.5.2 Effet d’un seuillage en $2^{-j\delta}$

Le seuil en  $2^{-j\delta}$  va être inférieur aux coefficients de rang  $n$  si  $\delta > 1/2$ . Dans ce cas,  $\alpha_g(h(n), n, f_n)$  tendra vers 0. En revanche, si  $\delta < 1/2$ , alors tous les coefficients sont seuillés à partir d’un certain rang fini.  $\alpha_g(h(n), n, f_n)$  tendra alors vers  $+\infty$ .

**Proposition 5.5.** *Soit  $f$  un signal dans  $C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$  avec  $\epsilon_0 > 0$ . Soit  $g_n$  le signal bruité défini par l’équation (5.8). Soit  $\tilde{f}_n$  le signal  $g_n$  débruité par la méthode du*

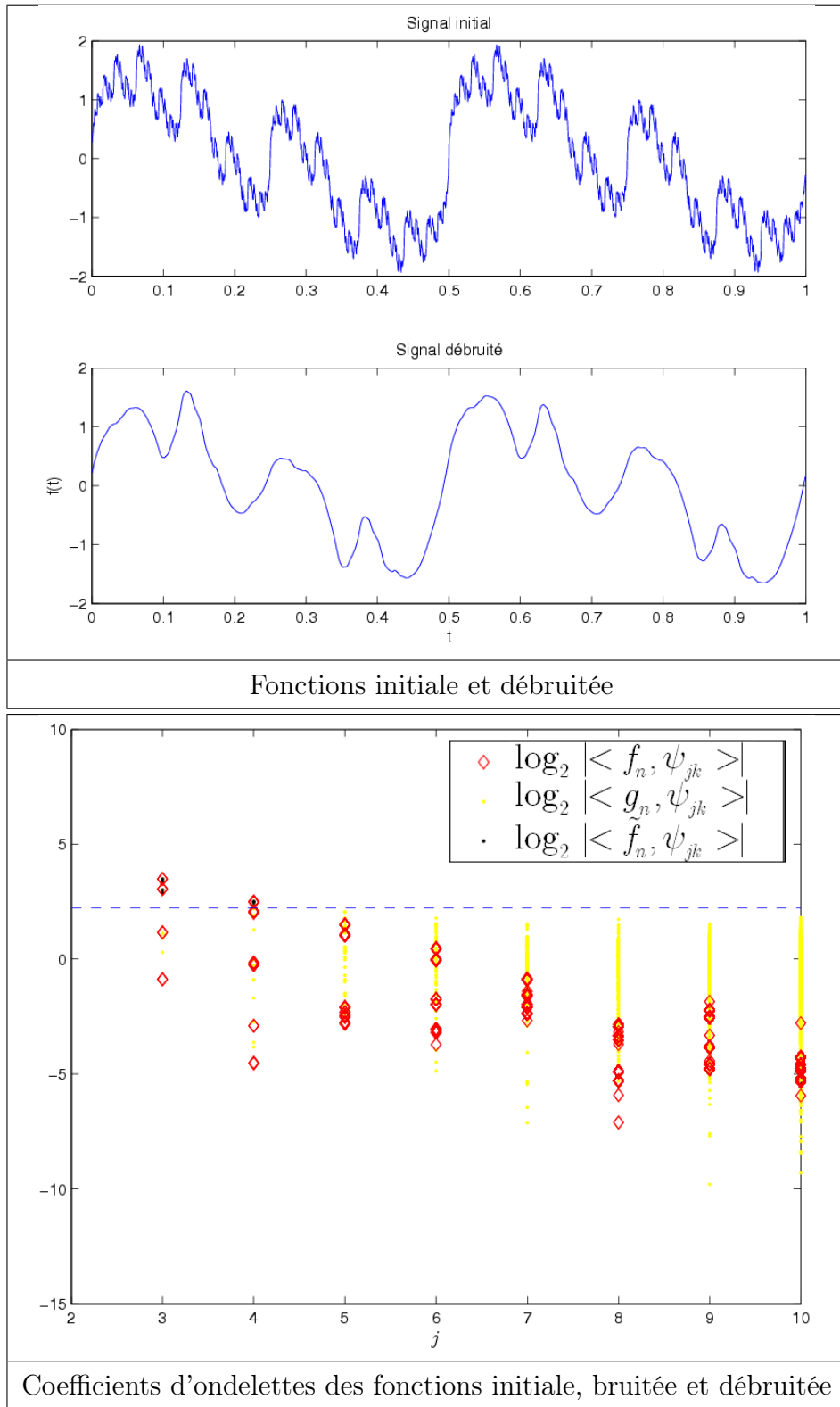


FIG. 5.2 – Weierstrass échantillonnée sur  $2^{11}$  points et d'exposant  $\alpha_g(f) = 0.5$



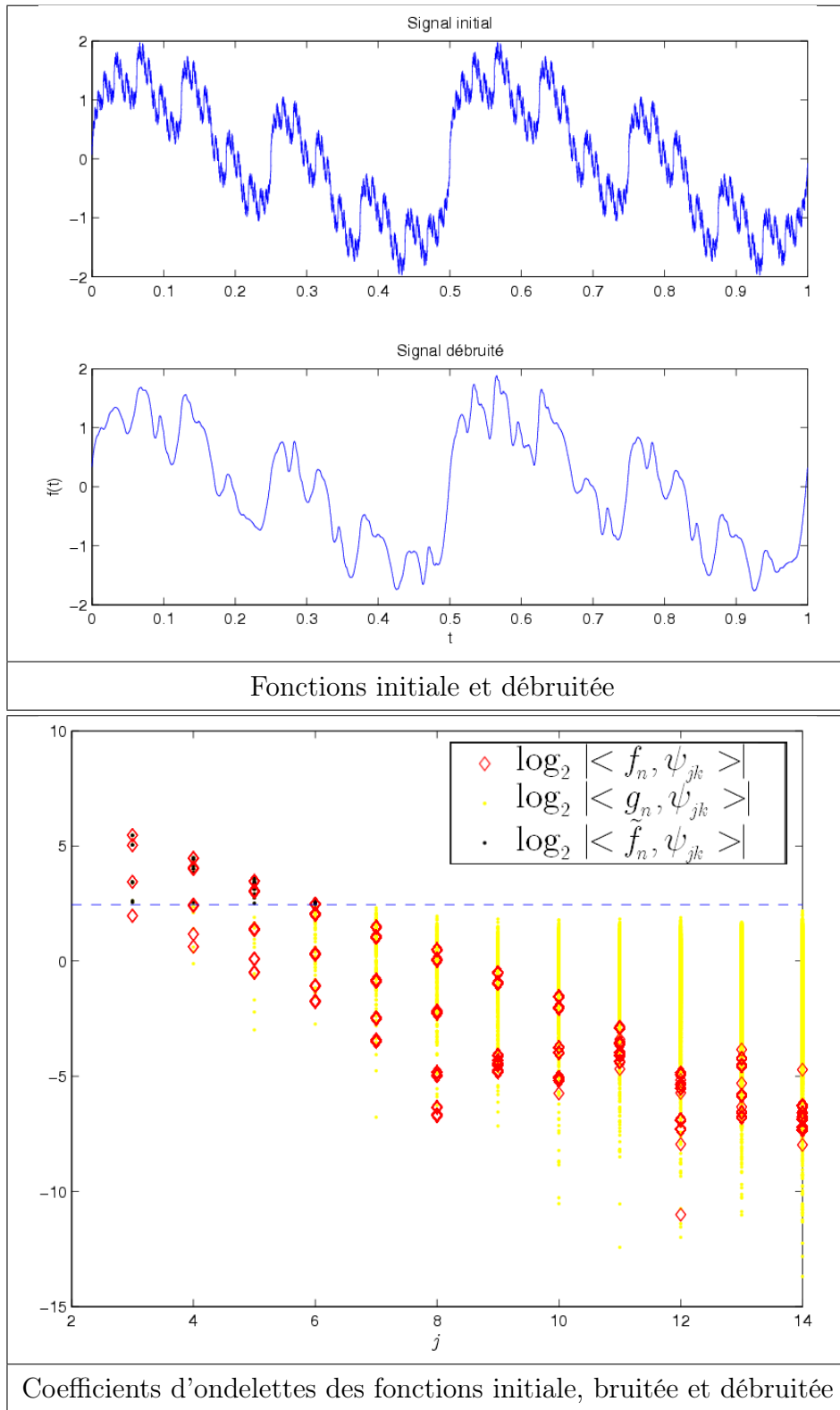


FIG. 5.3 – Weierstrass échantillonnée sur  $2^{15}$  points et d'exposant  $\alpha_g(f) = 0.5$

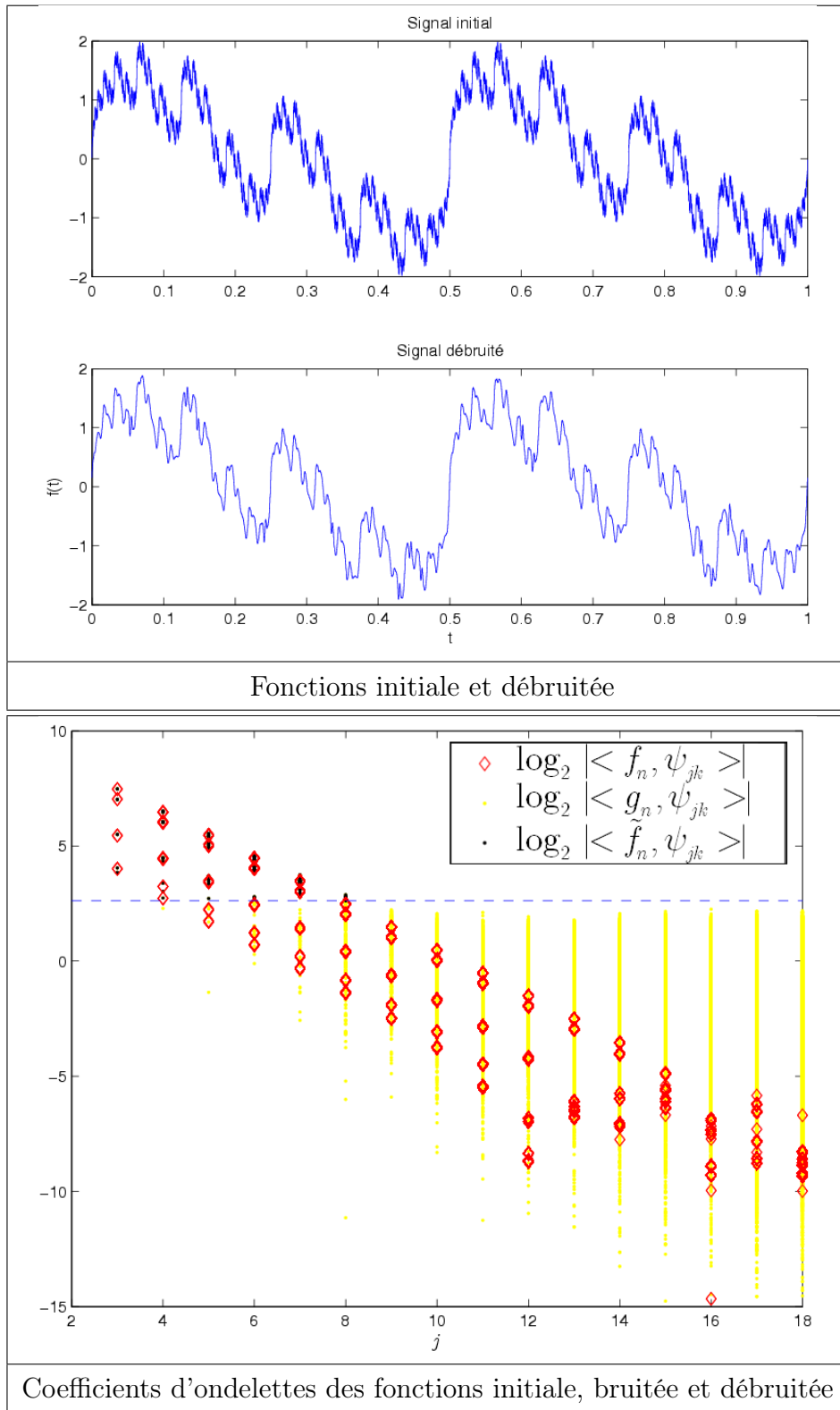


FIG. 5.4 – Weierstrass échantillonnée sur  $2^{19}$  points et d'exposant  $\alpha_g(f) = 0.5$

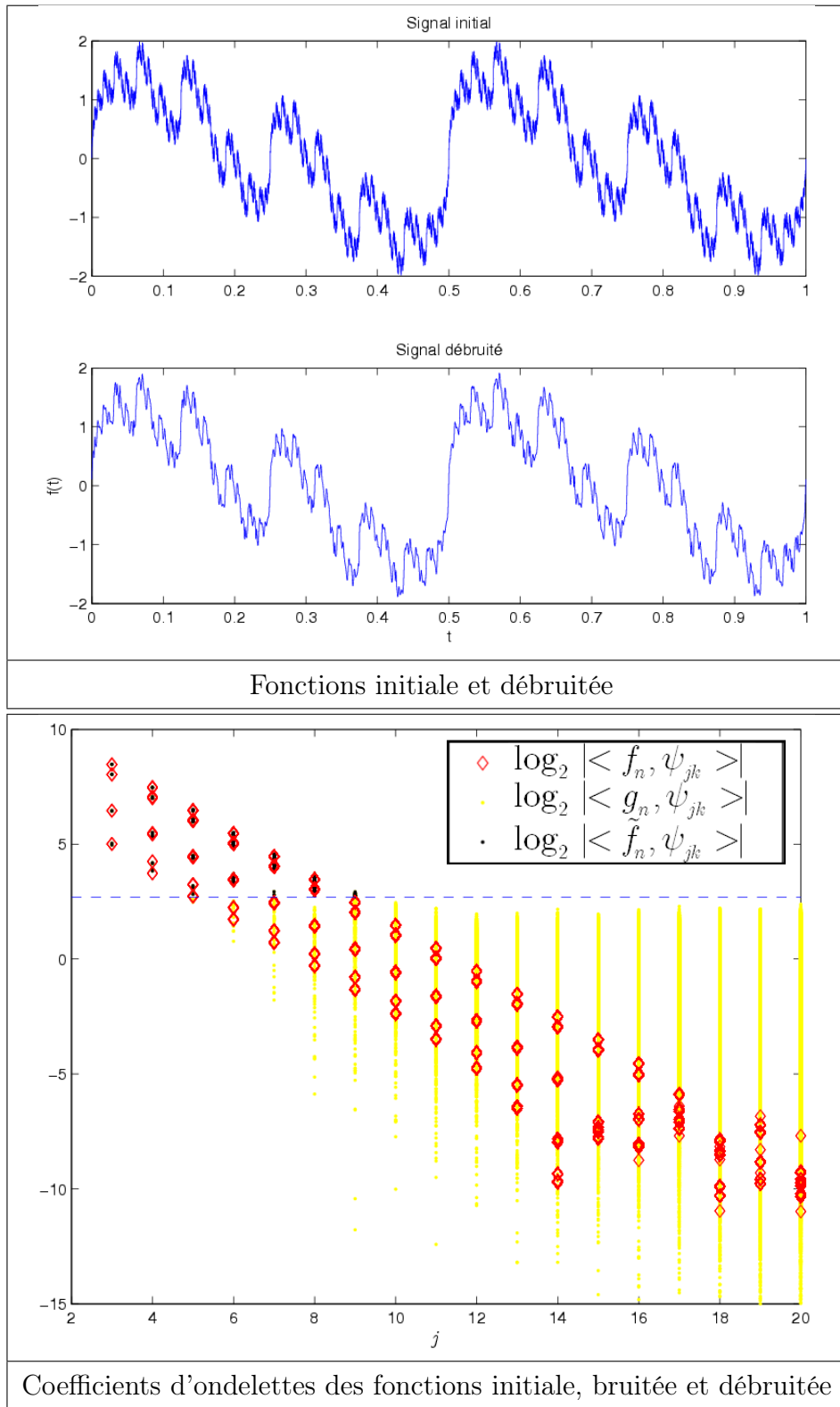


FIG. 5.5 – Weierstrass échantillonnée sur  $2^{21}$  points et d'exposant  $\alpha_g(f) = 0.5$

seuillage dur, avec le seuil :  $\lambda_j = 2^{-j\delta}$ .

Soit  $h(n)$  une fonction croissante qui tend vers  $+\infty$ ,  $h(n) \leq n$ . Si  $\delta > 1/2$  alors presque sûrement  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n) \rightarrow 0$ .

*Preuve.* Choisissons sans perte de généralité  $\epsilon > 0$  assez petit pour avoir  $\epsilon + 1/2 < \delta$ . D'après le lemme 5.1, presque sûrement,  $|\langle g_n, \psi_{n0} \rangle| \geq 2^{-n.(\epsilon+1/2)}$ . Or, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$  :  $2^{-n.(\epsilon+1/2)} \geq 2^{-\delta/2}$ . On en déduit que le coefficient  $\langle g_n, \psi_{n0} \rangle$  n'est pas seuillé, donc  $|\langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle| \geq 2^{-n/2+n\epsilon}$ . Presque sûrement,  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n) \leq \epsilon$ .

Par ailleurs, le théorème 5.3 permet également d'affirmer que, pour tout  $\epsilon > 0$ , presque sûrement,  $\alpha_g(h(n), n, g_n) \geq -\epsilon$  pour  $n$  assez grand. Or,  $|\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| \leq |\langle f_n, \psi_{jk} \rangle|$ , donc  $\alpha_g(h(n), n, g_n) \geq -\epsilon$ , d'où le résultat.  $\square$

**Proposition 5.6.** Soit  $f$  un signal dans  $C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$  avec  $\epsilon_0 > 0$ . Soit  $g_n$  le signal bruité défini par l'équation (5.8).

Soit  $\tilde{f}_n$  le signal débruité par la méthode du seuillage dur, avec le seuil :  $\lambda_j = 2^{-j\delta}$ . Soit  $h(n)$  une fonction croissante qui tend vers  $+\infty$ ,  $h(n) \leq n$ . Si  $\delta < 1/2$  alors  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend presque sûrement vers  $+\infty$ .

*Preuve.* Dans ce cas,  $\delta < \frac{1}{2} + \alpha_g(f)$  donc, d'après le théorème 5.1 il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N_1$ , et pour tout  $j \geq h(n)$  :  $|\langle f_n, \psi_{jk} \rangle| \leq 1/2.2^{-j\delta}$ .

De plus, d'après le lemme 5.1, presque sûrement, il existe  $N_2$  tel que pour tout  $n \geq N_2$  :  $\max_{j,k} |2^{-n/2} b_n^{jk}| \leq 1/2.2^{-n\delta}$ , ce qui implique que, pour tout  $(j, k)$   $|2^{-n/2} b_n^{jk}| \leq 1/2.2^{-j\delta}$ .

Il vient que pour tout  $n \geq \max(N_1, N_2)$ , pour tout  $j \geq h(n)$  :  $|\langle f_n, \psi_{jk} \rangle| \leq 2^{-j\delta}$ . On en déduit le résultat.  $\square$

On peut conclure de ces résultats que, de façon théorique, pour  $n$  grand, un seuillage en  $2^{-j\delta}$  va forcément surlisser le signal (si  $\delta < 1/2$ ) ou bien lui laisser l'irrégularité d'un bruit blanc (si  $\delta > 1/2$ ). Il serait éventuellement intéressant d'étudier l'effet d'un seuillage en  $2^{-j\delta-n/2}$ . La situation serait alors sans doute analogue à celle d'un seuillage en  $2^{-n/2}\sqrt{2n \ln 2}$ , avec une échelle de coupure.

## 5.6 Estimation de l'échelle de coupure dans un signal bruité

Nous venons de voir que le seuillage dur ne permet pas toujours de retrouver la régularité du signal original. Nous allons définir dans la section 5.7 une modification du seuillage dur qui résoud ce problème. Pour la mettre en oeuvre, il est nécessaire de pouvoir estimer "l'échelle de coupure", c'est-à-dire l'échelle à partir de laquelle les coefficients du signal original seront négligeables devant ceux du bruit. Le but de cette section est de proposer un estimateur pour cette échelle de coupure.

Nous utiliserons le théorème suivant (voir par exemple [Pet95], Theorem 2.7, p. 55).

**Théorème 5.5.** *Soient  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes et supposons qu'il existe des constantes positives  $g_1, \dots, g_n$ , et  $T$  telles que :*

$$\forall t \in [-T, T], \quad \mathbb{E}(e^{tX_k}) \leq e^{g_k \frac{t^2}{2}}, \quad k = 1 \dots n.$$

Alors :

$$\begin{aligned} P(S_n \geq x) &\leq e^{-\frac{x^2}{2G_n}} & \text{si } 0 \leq x \leq G_n T, \\ P(S_n \geq x) &\leq e^{-\frac{Tx}{2}} & \text{si } x \geq G_n T, \\ P(S_n \leq -x) &\leq e^{-\frac{x^2}{2G_n}} & \text{si } 0 \leq x \leq G_n T, \\ P(S_n \leq -x) &\leq e^{-\frac{Tx}{2}} & \text{si } x \geq G_n T, \end{aligned}$$

Où  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$  et  $G_n = \sum_{k=1}^n g_k$ .

L'estimateur de l'échelle de coupure se déduira du théorème plus général ci-dessous.

**Théorème 5.6.** *Soient  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}, (\sigma_i)_{i \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles.*

*Supposons :*

1.  $\beta = \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{-\log |x_i|}{i} > 0$ .
2. *il existe une suite décroissante  $(\varepsilon_n)$  telle que  $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$  quand  $n \rightarrow \infty$  et  $\frac{-\log |x_i|}{i} \geq \beta - \varepsilon_i$ , pour tout  $i$ .*
3.  $\forall i, \sigma_i > 0$ .
4.  $\lim_{i \rightarrow \infty} \sigma_i = 0$ .

$$5. \quad 0 < \delta' := \liminf_{i \rightarrow \infty} \frac{-\log \sigma_i}{i} \leq \delta := \limsup_{i \rightarrow \infty} \frac{-\log \sigma_i}{i} < \beta.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on considère le vecteur aléatoire  $Y = (y_1, \dots, y_n)$ , où les  $(y_i)$  sont des variables indépendantes suivant des lois normales de moyenne  $x_i$  et de variance  $\sigma_n^2$ , c.a.d  $y_i = N(x_i, \sigma_n)$ .

Soit :

$$\mathcal{L}_n(p) = \frac{1}{(n-p+1)^2} \sum_{i=p}^n y_i^2.$$

Notons  $p^* = p^*(n)$  un entier tel que :

$$\mathcal{L}_n(p^*) = \min_{p: 1 \leq p \leq n-b \log(n)} \mathcal{L}_n(p),$$

où  $b > 1$  est fixé. Soit enfin  $q(n) = \frac{-\log \sigma_n}{\beta - \frac{1}{n}}$ . Alors :

$$\forall a > 1, \quad p^*(n) \leq q(n) + a \log(n), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{presque sûrement.} \quad (5.12)$$

Si de plus la suite  $(x_i)$  vérifie la condition suivante :

6. Il existe une suite d'entiers positifs  $(\theta_n)$  telle que, pour tout  $n$  assez grand et tout  $\theta \geq \theta_n$  :

$$\frac{1}{\theta} \sum_{i=q-\theta}^{q-1} x_i^2 > b \sigma_n^2 \frac{1 - \frac{\delta_*}{\beta}}{(1 - \frac{\delta^*}{\beta})^2},$$

où  $\delta_*$  est un nombre dans  $(0, \delta')$  et  $\delta^*$  est un nombre dans  $(\delta, \beta)$ .

Alors :

$$\forall a > 1, \quad p^*(n) \geq q(n) - \max(a \log(n), \theta_n), \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{presque sûrement.} \quad (5.13)$$

*Remarque 1*

L'hypothèse (5) et la définition de  $q$  impliquent qu'il existe  $0 < \rho' \leq \rho < 1$  tels que  $\rho' n \leq q(n) \leq \rho n$  pour tout  $n$  suffisamment grand. On peut considérer par exemple  $\rho' = \frac{\delta_*}{\beta}$ ,  $\rho = \frac{\delta^*}{\beta}$ .

*Remarque 2*

Le fait mentionné dans la remarque 1 et l'hypothèse  $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$  impliquent que  $\varepsilon_q < \frac{1}{n}$  pour  $n$  assez grand (en fait, on pourrait remplacer la condition  $\varepsilon_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$  par celle-ci, moins restrictive :  $\varepsilon_n < \frac{\rho'}{n}$ ).

*Remarque 3*

Aucune autre hypothèse que la positivité n'est faite sur la suite  $(\theta_n)$ . En particulier, elle ne doit pas tendre vers  $+\infty$ . En fait, dans le cas simple où  $x_i = 2^{-i\beta}$ ,  $\beta > 0$ , on peut prendre  $\theta_n = 2$  pour tout  $n$ .

*Remarque 4*

La condition 6 peut être pénible à prouver en pratique. Dans de nombreux cas intéressants, elle peut être remplacée par la condition plus forte mais plus maniable  $\sigma_n^2 = o(\frac{1}{\theta} \sum_{i=q-\theta}^{q-1} x_i^2)$ .

*Remarque 5*

Une approche similaire a été abordé dans [PT00] : dans cet article, les auteures donnent une procédure pour obtenir un intervalle de confiance sur la valeur d'une fonction  $f$  en un point  $x_0$ . Il n'est pas fait d'hypothèse sur la régularité de  $f$  au point  $x_0$ . Néanmoins, une condition est donnée sur la "visibilité de l'irrégularité" de la fonction  $f$  (c'est la condition  $H_s(M, x_0)$ , page 307). En effet, l'intervalle de confiance dépend d'une suite  $\rho_n$  telle que : pour tout  $n$ , des "gros" coefficients (c'est à dire assez gros pour refléter l'irrégularité du signal) se trouvent entre l'échelle  $j_{s(n)} - \rho_n$  et l'échelle  $j_{s(n)}$ , où  $j_{s(n)}$  est une échelle proche de la "coupure"  $\frac{1}{1+2\alpha_l(f, x_0)}$ . Plus  $\rho_n$  est petite, plus l'intervalle de confiance est réduit.

Nous aurons besoin du lemme élémentaire suivant :

**Lemma**

Soit  $z = N(0, 1)$  et  $\Omega = z^2 + 2\lambda z - 1$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Alors

$$\mathbb{E}(e^{t\Omega}) \leq e^{\frac{gt^2}{2}} \quad (5.14)$$

Pour  $t \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$  et  $g = 16 \log 2 - 8 + 8\lambda^2$ .  
 $=: C + 8\lambda^2$

**Preuve du lemme**

Des calculs simples donnent  $\mathbb{E}(e^{t\Omega}) = \frac{e^{t(\frac{\lambda^2}{1-2t} - (1+\lambda^2))}}{\sqrt{1-2t}}$ , d'où (5.14) vient immédiatement.

■

**Preuve du théorème 5.6**

Soit  $\lambda_i = \frac{x_i}{\sigma_n}$ ,  $\Omega_i = z_i^2 + 2\lambda_i z_i - 1$ , where  $z_i = \frac{y_i - x_i}{\sigma_n}$ .

Preuve de (5.12)

On veut montrer que, sous les hypothèses 1) - 5), presque sûrement,  $\mathcal{L}_n(q(n)) - \mathcal{L}_n(p(n)) \leq 0$  pour  $n$  assez grand, pour toute suite  $p(n)$  telle que  $q(n) + a \log(n) < p(n) \leq n - b \log(n)$  pour  $a > 1, b > 1$  fixés. Soit une telle séquence  $p(n)$ . Notons que, en particulier,  $p(n) > q(n)$ . Pour des raisons de simplicité, nous écrirons  $\mathcal{L}, p, q$  au lieu de  $\mathcal{L}_n, p(n), q(n)$ .

$\mathcal{L}(q) - \mathcal{L}(p) > 0$  est équivalent à :

$$X := (n - p + 1)^2 \sum_{i=q}^{p-1} y_i^2 + (q - p)(2n - p - q + 2) \sum_{i=p}^n y_i^2 > 0.$$

Definissons :

$$\begin{aligned} X_i &= \sigma_n^2 (n - p + 1)^2 \Omega_i & \text{pour } i = q \dots p - 1, \\ X_i &= \sigma_n^2 (q - p)(2n - p - q + 2) \Omega_i & \text{pour } i = p \dots n, \\ X_i &= 0 & \text{for } i = 0 \dots q - 1. \end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{i=1}^n X_i \\ &= X - (n - p + 1)^2 \sum_{i=q}^{p-1} x_i^2 + (p - q)(2n - p - q + 2) \sum_{i=p}^n x_i^2 \\ &\quad + \sigma_n^2 (p - q)(n - p + 1)(n - q + 1) \\ &=: X + x \end{aligned}$$

Ainsi  $X > 0$  si et seulement si  $S_n > x$ .

Par ailleurs :

– pour  $i = q \dots p - 1$  :

$$\mathbb{E}(e^{tX_i}) \leq e^{g_i \frac{t^2}{2}} \text{ pour } t \in \left[ -\frac{1}{4\sigma_n^2(n - p + 1)^2}, \frac{1}{4\sigma_n^2(n - p + 1)^2} \right] =: [-T_1, T_1]$$

$$\text{et } g_i = C\sigma_n^4(n - p + 1)^4 + 8\sigma_n^2 x_i^2 (n - p + 1)^4.$$

– pour  $i = p \dots n$  :

$$\mathbb{E}(e^{tX_i}) \leq e^{g_i \frac{t^2}{2}}$$



$$\text{pour } t \in \left[ \frac{1}{4\sigma_n^2(q-p)(2n-p-q+2)}, -\frac{1}{4\sigma_n^2(q-p)(2n-p-q+2)} \right] =: [-T_2, T_2]$$

$$\text{et } g_i = C\sigma_n^4(p-q)^2(2n-p-q+2)^2 + 8\sigma_n^2x_i^2(p-q)^2(2n-p-q+2)^2.$$

Nous voulons appliquer le théorème 5.5. Dans ce but, nous calculons

$$\begin{aligned} G_n := \sum_{i=1}^n g_i &= C\sigma_n^4(p-q)(n-p+1)[(n-p+1)^3 + (p-q)(2n-p-q+2)^2] \\ &+ 8\sigma_n^2[(n-p+1)^4 \sum_q^{p-1} x_i^2 + (p-q)^2(2n-p-q+2)^2 \sum_{i=p}^n x_i^2] \end{aligned}$$

Nous devons également calculer le minimum de  $T_1$  et  $T_2$ , afin de poser  $T = \min(T_1, T_2)$ .

Or,  $T_2 < T_1$  si et seulement si  $f(n, p, q) := (p-q)(2n-p-q+2) - (n-p+1)^2 > 0$ .  $f$  est une fonction croissante de  $p$ , et on trouve que :

$$\begin{aligned} T &= T_1 \quad \text{si } n \geq p \geq \frac{\sqrt{2}}{2}q + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(n+1) =: \tilde{p} \\ &= T_2 \quad \text{si } q < p \leq \frac{\sqrt{2}}{2}q + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(n+1). \end{aligned}$$

L'étape suivante est de comparer  $x$  et  $G_n T$

– si  $p \leq \tilde{p}$  :

$$G_n T - x = G_n T_2 - x =: A + B + C,$$

où :

$$\begin{aligned} A &= (n-p+1)\sigma_n^2(p-q) \left[ n \left( \frac{C}{2} - 1 \right) - p \frac{C}{4} + q \left( 1 - \frac{C}{4} \right) + \frac{C}{2} - 1 \right] \\ &+ \frac{C}{4} \frac{(n-p+1)^4}{(2n-p-q+2)} \sigma_n^2. \\ B &= 2 \frac{(n-p+1)^4}{(p-q)(2n-p-q+2)} \sum_q^{p-1} x_i^2 + (n-p+1)^2 \sum_q^{p-1} x_i^2. \\ C &= 2(p-q)(2n-p-q+2) \sum_p^n x_i^2 - (p-q)(2n-p-q+2) \sum_p^n x_i^2. \end{aligned}$$

Clairement,  $B \geq 0, C \geq 0$ .

Comme  $p \leq \tilde{p}$ , on a  $-p\frac{C}{4} \geq -C\frac{\sqrt{2}}{8}q - \frac{C}{4}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)(n+1)$ .

Ainsi,

$$\begin{aligned} n\left(\frac{C}{2} - 1\right) - p\frac{C}{4} + q\left(1 - \frac{C}{4}\right) + \frac{C}{2} - 1 &\geq n\left(C\frac{2+\sqrt{2}}{8} - 1\right) + q\left(1 - C\frac{2+\sqrt{2}}{8}\right) + C\left[\frac{2+\sqrt{2}}{8}\right] - 1 \\ &\geq \left(C\frac{2+\sqrt{2}}{8} - 1\right)(n - q + 1) \geq 0, \end{aligned}$$

(Rappelons que  $C = 16\log 2 - 8$ ). En consequence,  $A \geq 0$  et finalement

$$x \leq G_n T_2.$$

– si  $p > \tilde{p}$  :

$$G_n T - x = G_n T_1 - x =: A + B + C$$

où

$$\begin{aligned} A &:= \sigma_n^2(p-q)[(n-p+1)^2 + (p-q)\frac{(2n-p-q+2)^2}{(n-p+1)} \\ &\quad - (n-p+1)(n-q+1)] \\ &= \sigma_n^2 \frac{(p-q)^2}{n-p+1} (n-q+1)(3n-2p-q+3) \geq 0 \end{aligned}$$

$$B := 2(n-p+1)^2 \sum_q^{p-1} x_i^2 + (n-p+1)^2 \sum_q^{p-1} x_1^2 \geq 0$$

$$C = [2(p-q)(2n-p-q+2) - (p-q)(2n-p-q+2)] \sum_p^n x_i^2 \geq 0.$$

Ainsi, on trouve encore  $x \leq G_n T$ .

Enfin, nous devons vérifier que  $x \geq 0$ .

Clairement,  $x \geq \sigma_n^2(p-q)(n-p+1)(n-q+1) - (n-p+1)^2 \sum_q^{p-1} x_i^2$ , si bien qu'une condition suffisante pour avoir  $x \geq 0$  est :

$$(p-q)\sigma_n^2 \geq \sum_q^{p-1} x_i^2.$$

L'hypothèse 2) implique que  $|x_q| \leq e^{-q(\beta-\varepsilon_q)}$ . Comme la suite  $(\varepsilon_n)$  est décroissante, nous obtenons que  $|x_i| \leq e^{-q(\beta-\varepsilon_q)}$  est vrai aussi pour  $i \geq q$  et  $n$  assez grand. Donc :

$$\sum_q^{p-1} x_i^2 \leq (p-q)e^{-2q(\beta-\varepsilon_q)} \leq (p-q)\sigma_n^2,$$

Puisque  $e^{-q(\beta-\varepsilon_q)} = \sigma_n^{\frac{\beta-\varepsilon_q}{\beta-1/n}} \leq \sigma_n$  (rappelons que  $\varepsilon_q < \frac{1}{n}$  - voir remarque 2).

Le théorème 5.5 s'applique, et nous avons besoin d'estimer  $\frac{x^2}{2G_n}$ .

Pour ceci, nous devons obtenir une meilleure estimation de  $\sum_q^{p-1} x_i^2$  que celle ci-dessus. Pour  $j \geq 0$ , on a, d'après l'hypothèse 2) :

$$\begin{aligned} |x_{q+j}| &\leq e^{-(q+j)(\beta-\varepsilon_{q+j})} \\ &\leq e^{-q(\beta-\varepsilon_q)} e^{-q(\varepsilon_q-\varepsilon_{q+j})} e^{-j(\beta-\varepsilon_{q+j})} \end{aligned}$$

Comme  $(\varepsilon_n)$  est décroissante,  $\varepsilon_q - \varepsilon_{q+j} \geq 0$ . De plus, comme  $(\varepsilon_n)_{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ , pour  $n$  assez grand,  $\varepsilon_{q+j} < \frac{\beta}{2}$ .

Ainsi :

$$|x_{q+j}| \leq e^{-q(\beta-\varepsilon_q)} e^{-j\frac{\beta}{2}} = \sigma_n e^{-j\frac{\beta}{2}},$$

et :

$$\sum_{j=0}^{p-q-1} x_{q+j}^2 \leq K \sigma_n^2,$$

où  $K$  est une constante positive finie. En conséquence :

$$\begin{aligned} x &\geq \sigma_n^2(p-q)(n-p+1)(n-q+1) - K(n-p+1)^2 \sigma_n^2 \\ &\geq \sigma^2(n-p+1)[(p-q)(n-q+1) - K(n-p+1)] \\ &\geq \sigma_n^2(n-p+1)(n-q+1)(p-q-K). \end{aligned}$$

Ecrivons  $G_n =: A + B + C$ , avec

$$A := C \sigma_n^4(p-q)(n-p+1)[(n-p+1)^3 + (p-q)(2n-p-q+2)^2].$$

$$B := 8 \sigma_n^2(n-p+1)^4 \sum_q^{p-1} x_i^2.$$

$$C := 8 \sigma_n^2(p-q)^2(2n-p-q+2)^2 \sum_p^n x_i^2.$$

Si  $p \leq \tilde{p}$ , on a  $(p-q)(2n-p-q+2) \leq (n-p+1)^2$ , et :

$$\begin{aligned} A &\leq C \sigma_n^4(p-q)(n-p+1) [(n-p+1)^3 + (n-p+1)^2(n-p+1+n-q+1)] \\ &\leq 3C \sigma_n^4(p-q)(n-p+1)^3(n-q+1). \end{aligned}$$

où  $K'$  désigne encore une constante positive finie qui peut changer d'une ligne à l'autre, on a :

$$B \leq K\sigma_n^4(n-p+1)^4 \leq K'A, \text{ et}$$

$$C \leq 8\sigma_n^2(p-q)^2(2n-p-q+2)^2(n-p+1)\sigma_n^2 \leq K'A,$$

Finalement,  $G_n \leq K'\sigma_n^4(p-q)(n-p+1)^3(n-q+1)$ , et :

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{2G_n} &\geq \frac{\sigma_n^4(n-p+1)^2(n-q+1)^2(p-q-K)^2}{K'\sigma_n^4(n-p+1)^3(n-q+1)(p-q)} \\ &\geq \frac{1}{K'} \frac{n-q+1}{n-p+1} \frac{(p-q-K)^2}{p-q} \\ &\geq K' \frac{(p-q-K)^2}{p-q}. \end{aligned}$$

Ainsi, dès que  $(p-q) > a \log(n)$  pour un réel  $a > 1$ , le lemme de Borel-Cantelli implique que, pour  $n$  assez grand,  $\mathcal{L}(q) < \mathcal{L}(p)$  presque sûrement.

Si  $p > \tilde{p}$ ,

$$\begin{aligned} A &\leq 5C\sigma_n^4(p-q)^2(n-p+1)(n-q+1)^2, \\ B &\leq A, \\ C &\leq A, \end{aligned}$$

et ainsi

$$\frac{x^2}{2G_n} \geq K'(n-p+1) \frac{(p-q-K)^2}{(p-q)^2}.$$

Comme par hypothèse sur  $p$ ,  $n-p+1 > b \log(n)$  avec  $b > 1$ , le résultat suit par le lemme de Borel-Cantelli.

#### Preuve de (5.13)

Nous voulons montrer que, sous les hypothèses 1) - 6), presque sûrement,  $\mathcal{L}_n(q(n)) - \mathcal{L}_n(p(n)) \leq 0$  pour  $n$  assez grand, pour toute suite  $p(n)$  telle que  $1 \leq p(n) < q(n) - \max(a \log(n), \theta_n)$ . Soit une telle suite  $p(n)$ . Remarquons en particulier que  $p(n) < q(n)$ . On écrira encore  $\mathcal{L}$ ,  $p$ ,  $q$  au lieu de  $\mathcal{L}_n$ ,  $p(n)$ ,  $q(n)$ .

$\mathcal{L}(q) - \mathcal{L}(p) > 0$  est équivalent à :

$$X := (n-q+1)^2 \sum_{i=p}^{q-1} y_i^2 + (p-q)(2n-p-q+2) \sum_{i=q}^n y_i^2 < 0.$$

Definissons :

$$\begin{aligned} X_i &= \sigma_n^2(n-q+1)^2\Omega_i & \text{for } i = p \dots q-1, \\ X_i &= \sigma_n^2(p-q)(2n-p-q+2)\Omega_i & \text{for } i = q \dots n, \\ X_i &= 0 & \text{for } i = 0 \dots p-1. \end{aligned}$$

Où  $\Omega_i$  est comme ci-dessus. Soit :

$$\begin{aligned} S_n &:= \sum_{i=1}^n X_i \\ &= X - (n-q+1)^2 \sum_{i=p}^{q-1} x_i^2 + (q-p)(2n-p-q+2) \sum_{i=q}^n x_i^2 \\ &\quad + \sigma_n^2(q-p)(n-p+1)(n-q+1) \\ &=: X - x \end{aligned}$$

Ainsi  $X < 0$  si et seulement si  $S_n < -x$ .

Pour appliquer le théorème 5.5, nous devons vérifier que  $x \geq 0$ . Nous pouvons facilement borner le terme  $\sum_{i=q}^n x_i^2$  :

$$\begin{aligned} \sum_{i=q}^n x_i^2 &\leq \sum_{i=q}^n e^{-2i(\beta-\varepsilon_i)} \\ &= \sum_{j=0}^{n-q} e^{-2(j+q)(\beta-\varepsilon_{j+q})} \\ &= \sum_{j=0}^{n-q} e^{-2q(\beta-\varepsilon_{j+q})} e^{-2j(\beta-\varepsilon_{j+q})} \\ &= e^{-2q(\beta-\varepsilon_q)} \sum_{j=0}^{n-q} e^{-2q(\varepsilon_q-\varepsilon_{j+q})} e^{-2j(\beta-\varepsilon_{j+q})} \\ &\leq \sigma_n^2 \sum_{j=0}^{n-q} e^{-2j(\beta-\varepsilon_{j+q})} \\ &\leq \sigma_n^2 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que la suite  $(\varepsilon_n)$  est décroissante. Alors :

$$x \geq (n - q + 1)^2 \sum_{i=p}^{q-1} x_i^2 - \sigma_n^2(q - p)[2n - p - q + 2 + (n - p + 1)(n - q + 1)]$$

Notons que :

$$n - q + 1 > n - q \geq n(1 - \rho),$$

où  $\rho$  est défini dans la remarque 1. Aussi

$$\begin{aligned} 2n - p - q + 2 + (n - p + 1)(n - q + 1) &\leq 2n + 1 - \rho' n + n(n - \rho' n + 1) \\ &= n^2(1 - \rho') + n(3 - \rho') + 1 \\ &\leq n^2(1 - \hat{\rho}'), \end{aligned}$$

pour tout  $\hat{\rho}' < \rho'$  fixé, pourvu que  $n$  soit suffisamment grand, où  $\rho'$  est défini remarque 1.

En conséquence,

$$x \geq n^2 \left[ (1 - \rho)^2 \sum_{i=p}^{q-1} x_i^2 - (1 - \hat{\rho}')(q - p)\sigma_n^2 \right].$$

La condition 6 implique ensuite :

$$x \geq n^2(q - p)\sigma_n^2(1 - \rho')(b - \frac{1 - \hat{\rho}'}{1 - \rho'}).$$

Pour un réel  $b > 1$  fixé, on peut choisir  $\hat{\rho}'$  tel que  $\eta := (b - \frac{1 - \hat{\rho}'}{1 - \rho'}) > 0$ , et ainsi

$$x \geq \eta(1 - \hat{\rho}')n^2(q - p)\sigma_n^2 > 0. \quad (5.15)$$

Calculons maintenant  $T$  et  $G$ .

– pour  $i = p \dots q - 1$  :

$$\mathbb{E}(e^{tX_i}) \leq e^{g_i \frac{t^2}{2}} \text{ pour } t \in \left[ -\frac{1}{4\sigma_n^2(n - q + 1)^2}, \frac{1}{4\sigma_n^2(n - q + 1)^2} \right] =: [-T_1, T_1]$$

$$\text{et } g_i = C\sigma_n^4(n - q + 1)^4 + 8\sigma_n^2x_i^2(n - q + 1)^4.$$

– pour  $i = q \dots n$  :

$$\mathbb{E}(e^{tX_i}) \leq e^{g_i \frac{t^2}{2}}$$

pour  $t \in \left[ \frac{1}{4\sigma_n^2(p-q)(2n-p-q+2)}, -\frac{1}{4\sigma_n^2(p-q)(2n-p-q+2)} \right] =: [-T_2, T_2]$

et  $g_i = C\sigma_n^4(q-p)^2(2n-p-q+2)^2 + 8\sigma_n^2x_i^2(q-p)^2(2n-p-q+2)^2$ .

$$\begin{aligned} G_n := \sum_{i=1}^n g_i &= C\sigma_n^4(q-p)(n-q+1)[(n-q+1)^3 + (q-p)(2n-p-q+2)^2] \\ &+ 8\sigma_n^2[(n-q+1)^4 \sum_p^{q-1} x_i^2 + (q-p)^2(2n-p-q+2)^2 \sum_{i=q}^n x_i^2] \end{aligned}$$

Calculons le minimum de  $T_1$  et  $T_2$ .

$T_2 < T_1$  si et seulement si  $(q-p)(2n-p-q+2) - (n-q+1)^2 > 0$ . En raisonnant comme précédemment, on trouve :

$$\begin{aligned} T &= T_2 \quad \text{if } 1 \leq p < \tilde{p} := \sqrt{2}q - (\sqrt{2} - 1)(n+1) \\ &= T_1 \quad \text{if } \tilde{p} \leq p < q. \end{aligned}$$

Notons que le cas  $T = T_2$  peut arriver ou pas, suivant la valeur de  $q$  : en effet,  $\tilde{p} \geq 1$  implique que  $q \geq (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})n + 1$ . Par exemple, si  $\sigma_n = 2^{-n/2}$ , ceci nécessite  $\beta \leq \frac{1}{2-\sqrt{2}} \approx 1.7$ .

L'étape suivante est de comparer  $x$  et  $G_n T$ .

– Si  $p \geq \tilde{p}$  :

$$\begin{aligned}
G_n T_1 - x &= \frac{C}{4} \sigma_n^2 (q-p) [(n-q+1)^2 + (q-p) \frac{(2n-p-q+2)^2}{n-q+1}] \\
&+ 2(n-q+1)^2 \sum_p^{q-1} x_i^2 + 2 \frac{(q-p)^2 (2n-p-q+2)^2}{(n-q+1)^2} \sum_q^n x_i^2 \\
&- (n-q+1)^2 \sum_p^{q-1} x_i^2 + (q-p)(2n-p-q+2) \sum_q^n x_i^2 \\
&+ \sigma_n^2 (q-p)(n-p+1)(n-q+1) \\
&\geq (n-q+1)^2 \sum_p^{q-1} x_i^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

– Quand  $p < \tilde{p}$ , la comparaison entre  $x$  et  $G_n T$  est plus complexe, et nécessite de distinguer d'autres sous-cas. Pour appliquer le théorème 5.5, il est plus simple d'estimer directement  $\frac{x^2}{2G_n}$  et  $\frac{T_2 x}{2}$ .

Il nous reste ainsi à montrer que  $\frac{x^2}{2G_n}$  tend “suffisamment vite” vers l'infini (ce qui est nécessaire dans les deux cas  $p < \tilde{p}$  et  $p \geq \tilde{p}$ ), et que la même chose est vraie pour  $\frac{T_2 x}{2}$  (ceci est nécessaire seulement si  $p < \tilde{p}$ ).

Nous commençons avec  $\frac{T_2 x}{2}$ . D'après (5.15) :

$$\begin{aligned}
\frac{T_2 x}{2} &\geq \frac{\eta(1-\hat{\rho}')n^2(q-p)\sigma_n^2}{8\sigma_n^2(q-p)(2n-p-q+2)} \\
&\geq \frac{\eta(1-\hat{\rho}')n}{16},
\end{aligned}$$

ce qui est suffisant pour appliquer le lemme de Borel-Cantelli.

Considérons maintenant  $\frac{x^2}{2G_n}$ . Nous calculons d'abord une borne supérieure grossière à  $G_n$ . En utilisant que  $\sum_{i=q}^n x_i^2 \leq \sigma_n^2$ , on obtient :

$$G_n \leq K \left( n^4(q-p)\sigma_n^4 + n^4\sigma_n^2 \sum_{i=p}^{q-1} x_i^2 + n^3(q-p)\sigma_n^4 \right).$$

En utilisant encore (5.15) :



$$G_n \leq K n^4 \sigma_n^2 \sum_{i=p}^{q-1} x_i^2.$$

En conséquence :

$$\frac{x^2}{2G_n} \geq \frac{\left[ (1-\rho)^2 \sum_{i=p}^{q-1} x_i^2 - (1-\hat{\rho}')(q-p)\sigma_n^2 \right]^2}{K \sigma_n^2 \sum_{i=p}^{q-1} x_i^2}.$$

La fonction  $F_z(y) = \frac{(z-y)^2}{zy}$  est décroissante. Ainsi :

$$\begin{aligned} & \frac{\left[ (1-\rho)^2 \sum_{i=p}^{q-1} x_i^2 - (1-\hat{\rho}')(q-p)\sigma_n^2 \right]^2}{K \sigma_n^2 \sum_{i=p}^{q-1} x_i^2} \\ &= (q-p) \frac{(1-\rho)^2 (1-\hat{\rho}')}{K} F_{(1-\rho)^2 \sum_{i=p}^{q-1} x_i^2} \left( (1-\hat{\rho}')(q-p)\sigma_n^2 \right) \\ &\geq (q-p) \frac{(1-\rho)^2 (1-\hat{\rho}')}{K} F_{(1-\rho)^2 \sum_{i=p}^{q-1} x_i^2} \left( \frac{(1-\hat{\rho}')(1-\rho)^2}{b(1-\rho')} \sum_{i=p}^{q-1} x_i^2 \right) \\ &= (q-p) \frac{(1-\rho)^2 (1-\hat{\rho}')}{K} b(1-\rho') \frac{\left(1 - \frac{1-\hat{\rho}'}{b(1-\rho')}\right)^2}{1-\hat{\rho}'} . \end{aligned}$$

Rappelons que  $(1 - \frac{1-\hat{\rho}'}{b(1-\rho')}) > 0$ . nous obtenons finalement :

$$\frac{x^2}{2G_n} \geq K(q-p).$$

Comme  $q-p > a \log(n)$ , le résultat s'ensuit par le lemme de Borel-Cantelli.

■

Revenons maintenant au problème qui nous occupe, à savoir l'estimation de l'échelle de coupure. Pour ce faire, nous appliquons le théorème ci-dessus à la situation suivante : les  $x_i$  sont les coefficients d'ondelette "au-dessus" d'un point donné d'une fonction  $X$ . On observe  $Y = X + B$ , où  $B$  est un bruit blanc gaussien centré de variance  $\sigma$ . Les coefficients d'ondelette de  $Y$  sont donc les  $y_i$ . Le problème est d'estimer la valeur de de l'exposant de Hölder à partir des coefficients d'ondelettes observés. Pour ce faire, nous faisons l'hypothèse que  $\chi_X(1) = \beta$ , c'est-à-dire que les exposants locaux et ponctuels coïncident. Notons enfin que dans le cas qui nous occupe, on a  $\sigma_n = 2^{-n/2}$ .

### Corollaire

Soit  $X$  une fonction telle que, au point  $t$ ,  $\chi_X(1) = \beta$ . Notons  $(x_i)$  les coefficients d'ondelette de  $X$  “au-dessus de”  $t$ . Supposons que  $\theta_n$  défini dans la proposition n'est pas plus grand que  $b \log(n)$  pour un  $b > 1$  et tout  $n$  suffisamment grand. Soit  $Y = X + B$ , où  $B$  est un bruit blanc gaussien centré de variance unitaire. Définissons :

$$\hat{\beta} = \frac{n}{2p^*} + \frac{1}{n},$$

où  $p^*$  est défini dans le théorème. Alors l'inégalité suivante est vraie presque sûrement pour  $n$  assez grand :

$$|\hat{\beta} - \beta| \leq 2b\beta^2 \frac{\log(n)}{n}.$$

### Preuve

De  $\sigma_n = 2^{-n/2}$ , on déduit  $q = \frac{n}{2\beta - \frac{1}{n}}$ , où  $\beta = \frac{n}{2q} + \frac{1}{n}$ . D'autre part,  $\hat{\beta} = \frac{n}{2p^*} + \frac{1}{n}$ . De plus, les hypothèses impliquent que  $p^* \in [q - b \log(n), q + b \log(n)]$  presque sûrement pour  $n$  assez grand. Ainsi,

$$\begin{aligned} |\hat{\beta} - \beta| &= n \frac{q - p^*}{2p^*q} \\ &\leq n \frac{b \log(n)}{q^2 - bq \log(n)} = \frac{nb \log(n)}{2n^2} 4\left(\beta - \frac{1}{n}\right)^2 \\ &\leq 2b \frac{\log(n)}{n} \left(\beta - \frac{1}{n}\right)^2 \\ &\leq 2b\beta^2 \frac{\log(n)}{n}. \end{aligned}$$

■

## 5.7 Une nouvelle méthode de débruitage fondée sur les ondelettes et sur la régularité locale

### 5.7.1 Principe

On a vu dans la section précédente une méthode permettant d'évaluer l'échelle de coupure d'un signal bruité. Cette échelle s'écrit, pour un échantillonnage à  $2^n$  points :

$$c_n = \frac{K.n}{1 + 2\alpha_g(f)}$$

Le corollaire du théorème de la section 5.6 fournit une suite (la suite  $\hat{\beta}$ ) qui tend presque sûrement vers  $\chi_f(1)$ . Nous allons supposer plus généralement ci-dessous que nous disposons d'une suite  $(s_n)_n$  qui tend, soit en probabilité, soit presque sûrement, vers  $\alpha_g(f)$ .

Il semble alors logique de conserver les coefficients des grandes échelles (peu bruités par rapport à leur valeur absolue) qui permettront de retrouver l'"allure générale" de  $f$  et de diminuer les coefficients des petites échelles, de manière qu'ils restent inférieurs en valeur absolue à  $2^{-j(\alpha_g(f)+1/2)}$  afin de retrouver la régularité du signal initial au point  $x_0$ .

**Proposition 5.7.** *Soit  $f$  un signal dans  $C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$  avec  $\epsilon_0 > 0$ . Soit  $g_n$  le signal bruité défini par l'équation 5.8. Soit  $\alpha_g(f)$  l'exposant de Hölder global de  $f$ .*

*Soit  $(s_n)_n$  une suite qui tend presque sûrement (resp. en probabilité) vers  $\alpha_g(f)$ .*

*Soit  $c(n) = \frac{n}{1+2s_n}$*

*Soit  $\tilde{f}_n$  définie par :*

$$\langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle = \begin{cases} \langle g_n, \psi_{jk} \rangle & \text{si } j \leq c(n) \\ \min(|\langle g_n, \psi_{jk} \rangle|, 2^{-j(s_n+1/2)}) \operatorname{sgn}(\langle g_n, \psi_{jk} \rangle) & \text{si } j > c(n) \end{cases} \quad (5.16)$$

*Alors, pour toute fonction  $h$  qui tend vers  $+\infty$  avec  $h(n) \leq n$ ,  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend presque sûrement (resp. en probabilité) vers  $\alpha_g(f)$*

*Preuve.* Soit  $h$  une fonction qui tend vers l'infini.

Fixons  $\eta > 0$ . L'égalité (5.11) est toujours vraie : il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $\epsilon > 0$  tels que presque sûrement, pour  $n$  assez grand :

$$\forall j \in \left[ h(n) \dots \frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1+\epsilon) \right] : |\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| \leq 2.2^{-j(\alpha_g(f)+1/2-\eta)}.$$

Comme  $s_n$  tend presque sûrement vers  $\alpha_g(f)$ ,  $c_n$  tend presque sûrement vers  $\frac{n}{1+2\alpha_g(f)}$  donc presque sûrement, pour  $n$  assez grand :  $c(n) \leq \frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1+\epsilon)$ . Par définition de  $\tilde{f}_n$ , on en déduit que

$$\forall j \in [h(n) \dots c(n)] : \left| \langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle \right| \leq 2.2^{-j(\alpha_g(f)+1/2-\eta)}.$$

De plus, pour tout  $j > c(n) : \left| \langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle \right| \leq 2^{-j(s_n+1/2)}$  donc presque sûrement pour  $n$  assez grand :

$$\forall j > c(n) : \left| \langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle \right| \leq 2^{-j(\alpha_g(f)+1/2-\eta)}.$$

Finalement :  $\forall j \in [h(n) \dots n] : \left| \langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle \right| \leq 2.2^{-j(\alpha_g(f)+1/2-\eta)}$ . On en déduit que  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n) \geq \alpha_g(f) - \eta$ .

Sans perte de généralité, on peut supposer  $\eta < \alpha_l(f)$ . Comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 5.3 : presque sûrement, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  :

$$|\langle g_n, \psi_{n0} \rangle| \geq 2^{-n(\eta+1/2)},$$

ce qui implique  $\left| \langle \tilde{f}_n, \psi_{n0} \rangle \right| = 2^{-j(s_n+1/2)}$ .

Comme  $s_n$  tend presque sûrement vers  $\alpha_g(f)$ ,  $\left| \langle \tilde{f}_n, \psi_{n0} \rangle \right|$  tend presque sûrement vers  $2^{-j(\alpha_g(f)+1/2)}$  donc  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n) \leq \alpha_g(f) + \eta$  presque sûrement quand  $n \rightarrow \infty$ .

La démonstration est identique en remplaçant l'hypothèse :  $(s_n)_n$  tend presque sûrement vers  $\alpha_g(f)$  par :  $(s_n)_n$  tend en probabilité vers  $\alpha_g(f)$ .  $\square$

En pratique, pour éviter un "saut d'amplitude" entre les coefficients débruités d'indice  $j \leq c_n$  et ceux d'indice  $j > c_n$ , on remplacera les  $2^{-j(s_n+1/2)}$  par les réels  $2^{K_n-j(s_n+1/2)}$ , où  $K_n$  est une suite qui restera bornée en fonction de  $n$  (voir partie suivante).

**Corollaire 5.1.** *Soit  $f$  un signal dans  $C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$  avec  $\epsilon_0 > 0$ . Soit  $g_n$  le signal bruité défini par l'équation 5.8. Soit  $\alpha_g(f)$  l'exposant de Hölder global de  $f$ .*

Soit  $(s_n)_n$  une suite qui tend presque sûrement (resp. en probabilité) vers  $\alpha_g(f)$ .

Soit  $K_n$  une suite telle que, presque sûrement, il existe  $A, B > 0$  et  $N \in \mathbb{N}$  tels que pour tout  $n \geq N$ ,  $K_n \in [A, B]$  (resp. il existe  $A, B > 0$  tels que  $P(A \leq K_n \leq B) \rightarrow 1$ ).

Soit  $c(n) = \frac{n}{1+2s_n}$

Soit  $\tilde{f}_n$  la fonction définie par :

$$\langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle = \begin{cases} \langle g_n, \psi_{jk} \rangle & \text{si } j \leq c(n) \\ \min(|\langle g_n, \psi_{jk} \rangle|, 2^{K_n-j(s_n+1/2)}) \operatorname{sgn}(\langle f_n, \psi_{jk} \rangle) & \text{si } j > c(n) \end{cases} \quad (5.17)$$

Alors, pour toute fonction  $h$  qui tend vers  $+\infty$ ,  $\alpha_g(h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend presque sûrement (resp. en probabilité) vers  $\alpha_g(f)$

*Preuve.* Pour la démonstration et pour une fonction  $f$  donnée, on note  $\hat{f}_n$  la fonction correspondante de la proposition 5.7 :

$$\langle \hat{f}_n, \psi_{jk} \rangle = \begin{cases} \langle g_n, \psi_{jk} \rangle & \text{si } j \leq c(n) \\ \min(|\langle g_n, \psi_{jk} \rangle|, 2^{-j(s_n+1/2)}) \operatorname{sgn}(\langle g_n, \psi_{jk} \rangle) & \text{si } j > c(n) \end{cases} \quad (5.18)$$

Dans le cas presque sûr : supposons vérifié l'évènement :  $K_n \in [A, B]$ .

En appliquant la proposition 5.7 à  $2^A f$  et  $2^B f$  et en remarquant que  $\alpha_g(2^A f) = \alpha_g(2^B f) = \alpha_g(f)$ , ce qui permet de conserver la même suite  $s_n$ , il vient que  $\alpha_g(h(n), n, \widehat{2^A f})$  tend presque sûrement vers  $\alpha_g(f)$  et  $\alpha_g(h(n), n, \widehat{2^B f})$  tend presque sûrement vers  $\alpha_g(f)$ . Or,

$$\alpha_g(h(n), n, \widehat{2^A f_n}) \leq \alpha_g(h(n), n, \tilde{f}) \leq \alpha_g(h(n), n, \widehat{2^B f_n}).$$

On en déduit le résultat.

En probabilités : en appliquant la proposition 5.7 à  $2^A f$  et  $2^B f$ , il vient que  $\alpha_g(h(n), n, \widehat{2^A f})$  tend en probabilité vers  $\alpha_g(f)$  et  $\alpha_g(h(n), n, \widehat{2^B f})$  tend en probabilité vers  $\alpha_g(f)$ . Or,  $\alpha_g(h(n), n, \widehat{2^A f_n}) \leq \alpha_g(h(n), n, \tilde{f}) \leq \alpha_g(h(n), n, \widehat{2^B f_n})$ . On en déduit le résultat.  $\square$

## 5.7.2 Applications numériques

La méthode précédente est applicable à condition de pouvoir calculer  $s_n$  à partir des coefficients de  $f_n$ .

Or, il n'existe pas de méthode générale pour obtenir une suite  $s_n$  qui tend vers une  $\liminf$  (ici,  $\alpha_g(f)$ ) à partir de renseignements sur les  $n$  premiers termes de la suite. Il est donc nécessaire de faire des hypothèses sur  $f$  pour pouvoir espérer calculer une suite qui tend vers  $\alpha_g(j, f)$  à partir des coefficients  $\langle f_n, \psi_{jk} \rangle$ .

Pour de nombreuses fonctions, comme les fonctions de Weierstrass ou les fBm, les moyennes  $y_j$  des valeurs absolues des coefficients à l'échelle  $j$  :

$$y_j = 2^{-j} \sum_{k=1}^{2^n} |\langle f, \psi_{jk} \rangle|$$

vérifient :

$$\log(y_j) \approx C - jD \text{ avec } D = \alpha_g(f) + 1/2.$$

Ceci serait également vrai en prenant le maximum des coefficients à l'échelle  $j$  plutôt que leur moyenne mais en pratique, la moyenne donne de meilleurs résultats.

Les  $\log y_j^n$ , où  $y_j^n = 2^{-j} \sum_k |\langle f_n, \psi_{jk} \rangle|$  vont être proches des  $\log y_j$  avant l'échelle de coupure, c'est à dire pour  $j < \frac{n}{1+2\alpha_g(f)}$ . Au delà de la coupure, les coefficients de  $f$  sont noyés dans le bruit blanc.

La figure 5.6 représente une fonction de Weierstrass, ainsi que les  $y_j$  associés. On constate bien l'alignement des  $\log y_j$ .

La figure 5.7 représente la même fonction bruitée, ainsi que les  $y_j$  associés. On constate bien l'alignement des  $y_j$  avant la coupure. On peut également remarquer la stabilité de  $y_j$ , plus grande que celle du maximum des coefficients à l'échelle  $j$  sous l'effet de l'addition de bruit.

Une idée naturelle est donc de retrouver la vitesse de décroissance initiale des coefficients : on veut corriger les  $\langle f_n, \psi_{jk} \rangle$  pour  $j \geq c_n$ , afin qu'ils soient de nouveau alignés sur les  $y_n^j$  pour  $j > c_n$ .

On va donc définir  $\tilde{g}$  comme dans le corollaire 5.1 en prenant par exemple pour  $s_n$  et  $K_n$  respectivement la pente et l'offset de la droite de régression des  $(y_j^n)_{j \leq c(n)}$ .

Il est possible de montrer que  $s_n$  converge en probabilité vers  $\alpha_g(f)$  et que

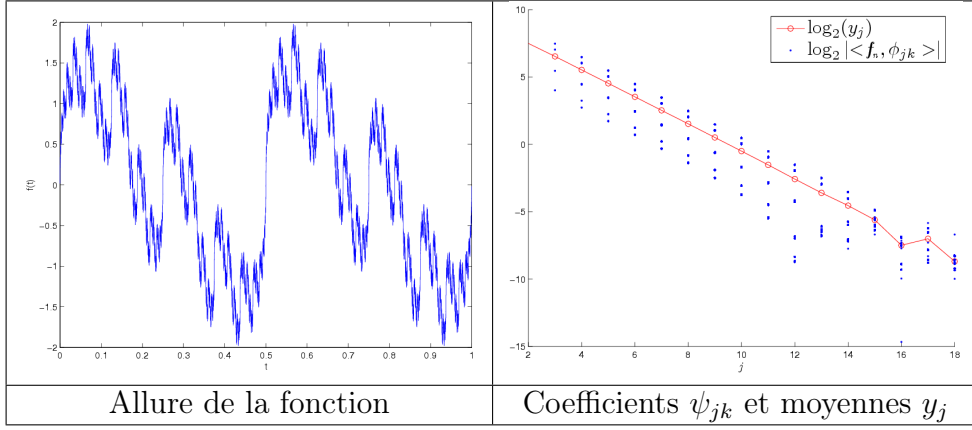


FIG. 5.6 – Weierstrass de  $2^{19}$  points et d'exposant  $\alpha_g(f) = 0.5$

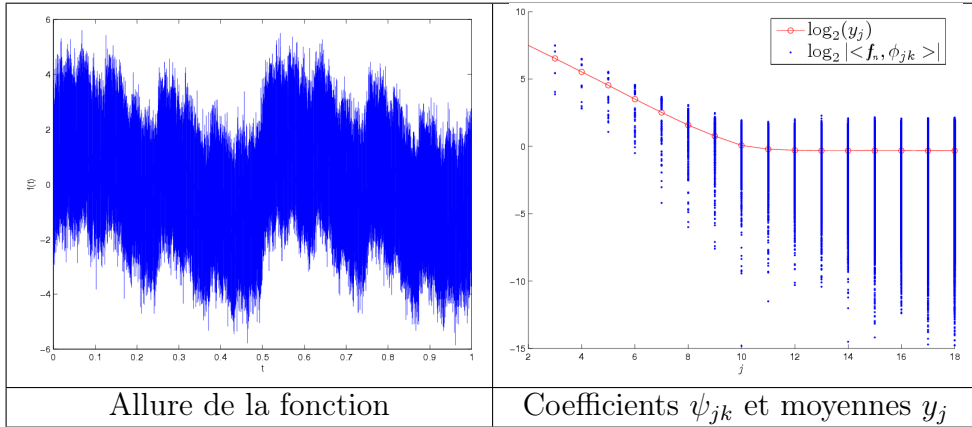


FIG. 5.7 – Weierstrass de  $2^{19}$  points et d'exposant  $\alpha_g(f) = 0.5$ , bruitée par un bruit blanc additif gaussien.

deux constantes  $A$  et  $B$  existent, telles que  $K_n$  est compris entre  $A$  et  $B$  avec une probabilité qui tend vers 1. On en déduit que  $\alpha_g(\tilde{g}, h(n), n)$  converge en probabilité vers  $\alpha_g(f)$  pour toute fonction  $h$ .

Après débruitage, on retrouve bien l'impression visuelle donnée par la fonction de Weierstrass (figures 5.9, 5.10, 5.11), sauf quand le nombre de points d'échantillonnage est trop faible (figure 5.8). En effet, les divers estimateurs mis en jeu nécessitent un nombre d'échelles suffisant pour donner des résultats corrects. On peut comparer les résultats obtenus avec ceux obtenus par seuillage, où la fonction était surlissée (figures 5.2, 5.3, 5.4, 5.5).

## 5.8 Extension à l'analyse 2-microlocale

### 5.8.1 Préliminaires

L'exposant d'oscillation  $\beta_o$  est décrit définition 2.5. Il a été introduit dans [Mey90a] et reflète le comportement de  $f$  sous l'effet d'une intégration infinitésimale. Un point  $x_0$  tel que  $\beta_o(f, x_0) > 0$  est une singularité oscillante de  $f$ .

Il a été montré dans [LS04] qu'un seuillage des coefficients en  $2^{-j\gamma}$  d'une fonction continue  $f \in L^2(\mathbb{R})$  peut fréquemment créer des singularités oscillantes. Notre but est d'examiner l'effet d'un seuillage en  $2^{-n/2}\sqrt{2n \ln 2}$  des coefficients d'ondelette d'un signal échantillonné à  $2^n$  points sur son aspect oscillant, quand  $n \rightarrow \infty$ .

Le caractère oscillant d'une fonction en  $x_0$  se décrit de manière simple en termes de spectre 2-microlocal au point  $x_0$ . Dans cette partie, on supposera  $x_0$  fixé, et on note

$$\chi^\epsilon(\rho, f) = \liminf_{(2^{-j}, |k2^{-j} - x_0|) \rightarrow 0} \left\{ \frac{\log_2 |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|}{-j} : (2^{-j}, |k2^{-j} - x_0|) \in D_{[\rho-\epsilon, \rho+\epsilon]} \right\}.$$

et

$$\chi(\rho, f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi^\epsilon(\rho, f)$$

le spectre 2-microlocal discret d'une fonction  $f$  en  $x_0$ .

Les deux propositions suivantes ont été montrées dans [LS04] :



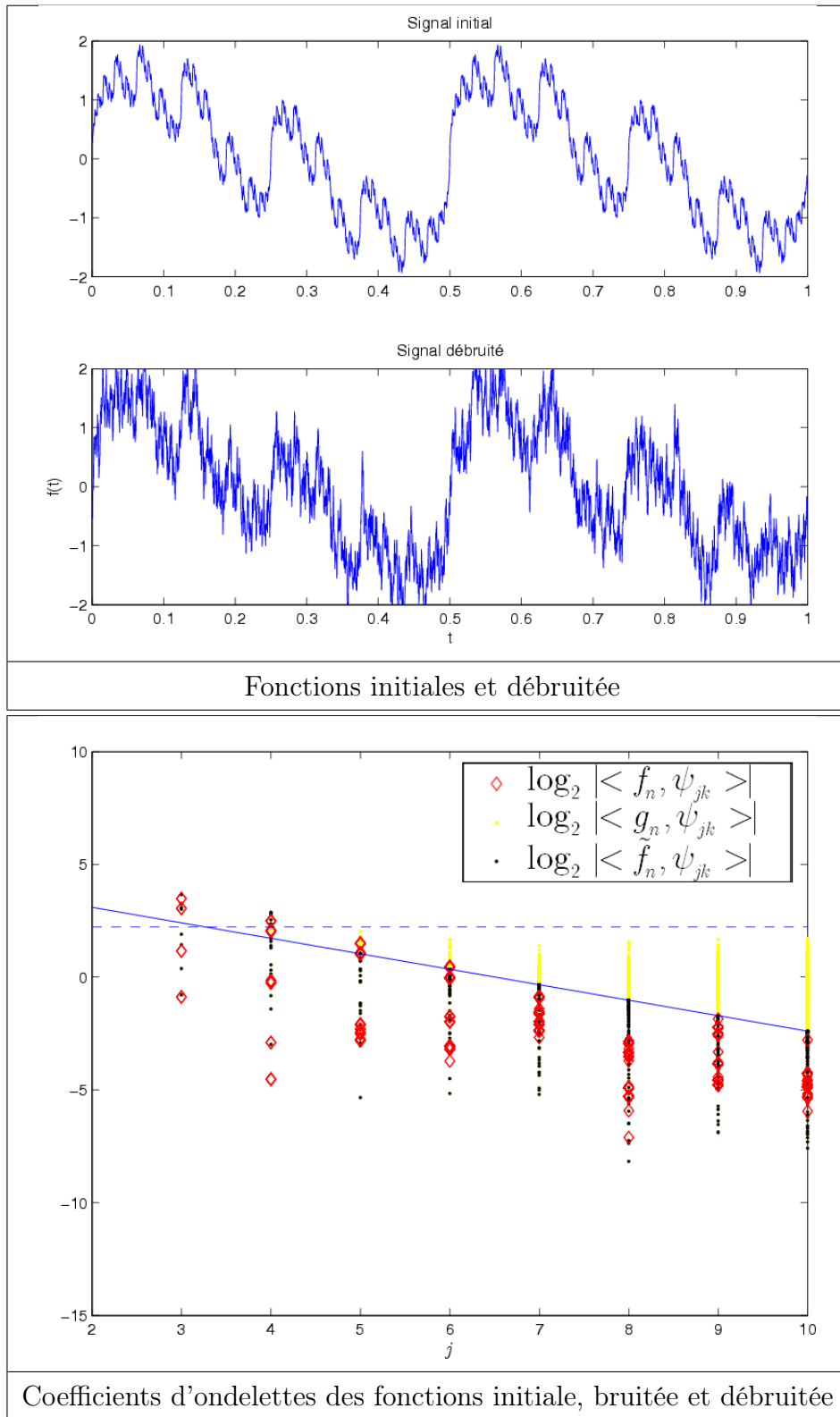


FIG. 5.8 – Weierstrass de  $2^{11}$  points et d'exposant  $\alpha_g(f) = 0.5$

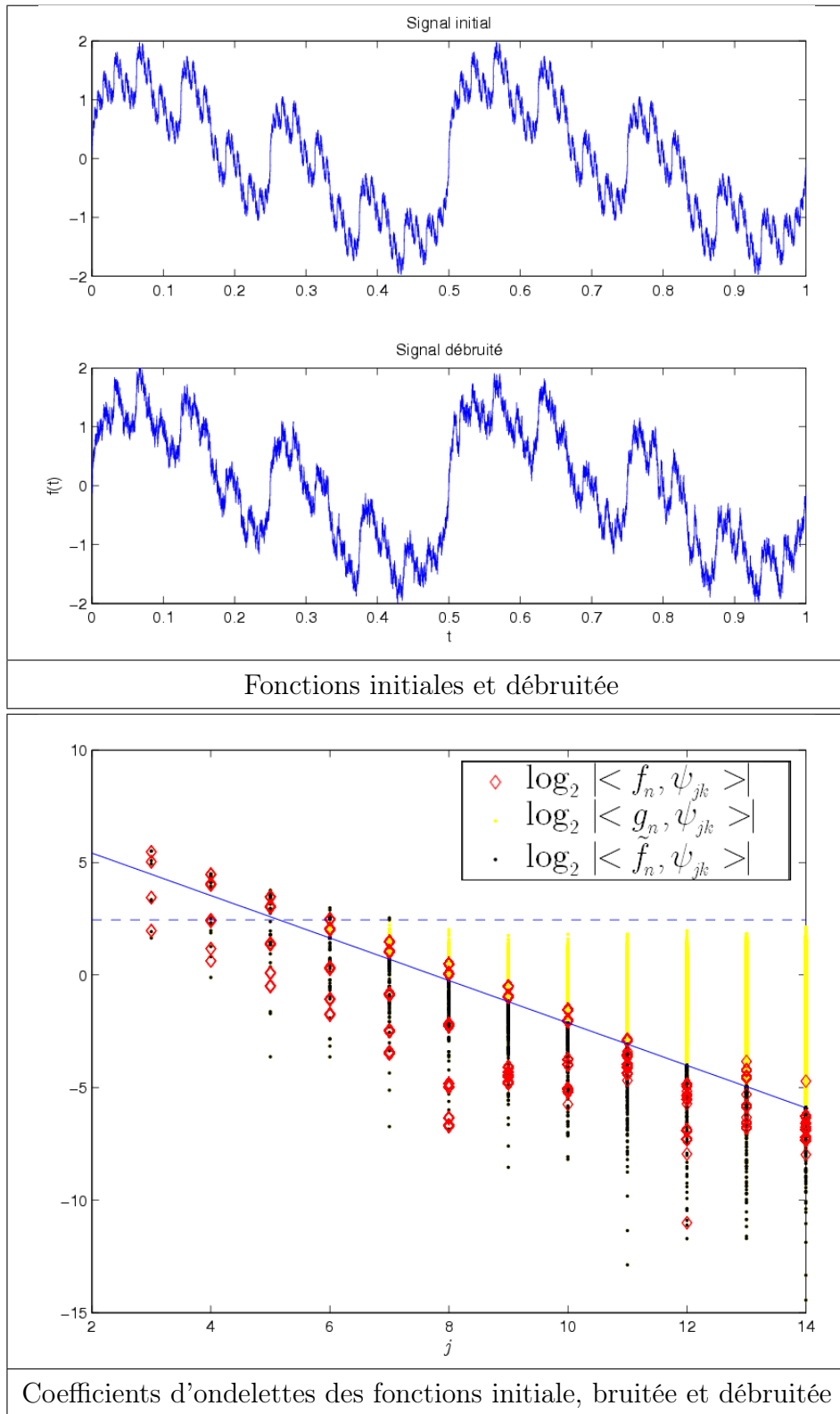


FIG. 5.9 – Weierstrass de  $2^{15}$  points et d'exposant  $\alpha_g(f) = 0.5$

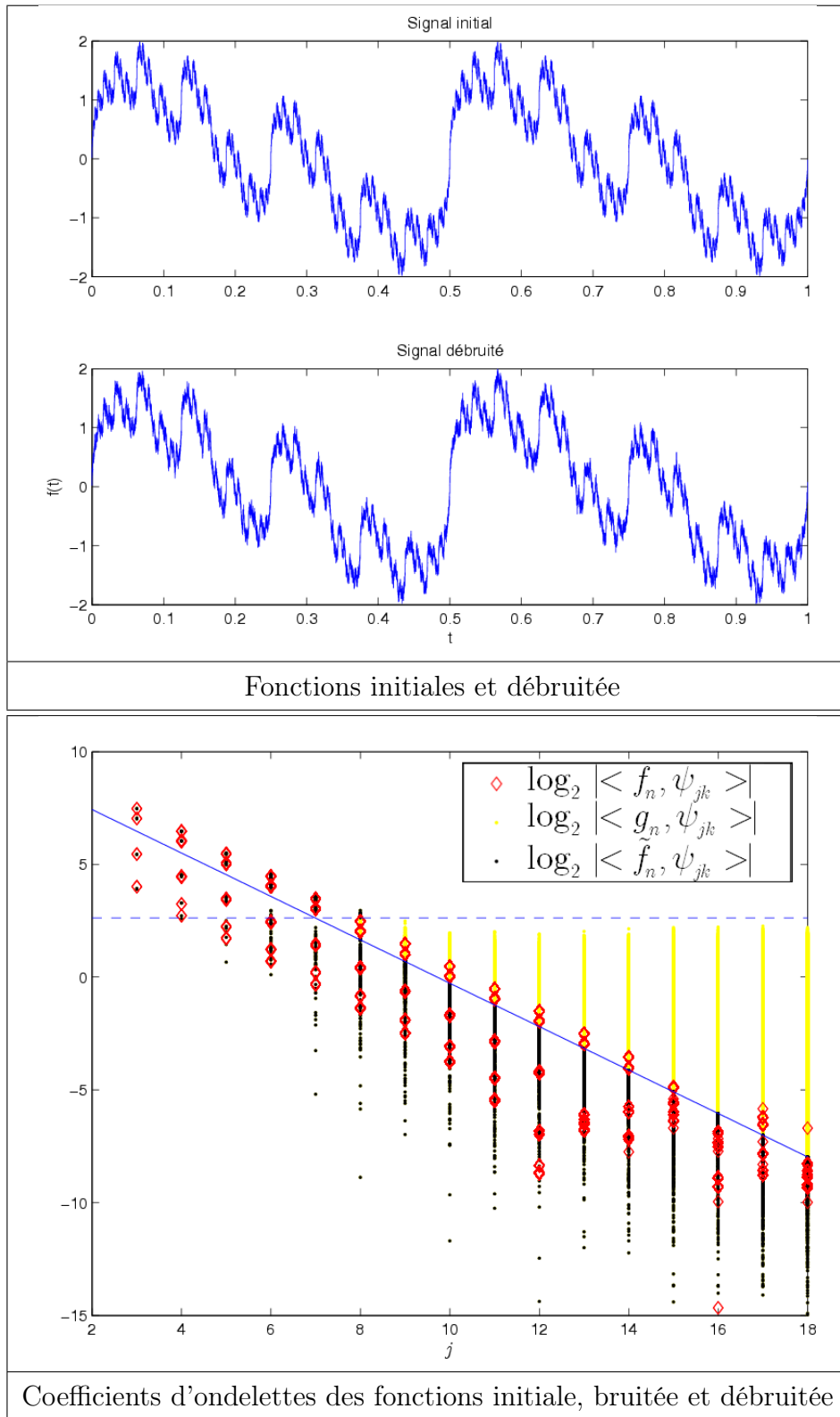


FIG. 5.10 – Weierstrass de  $2^{19}$  points et d'exposant  $\alpha_g(f) = 0.5$

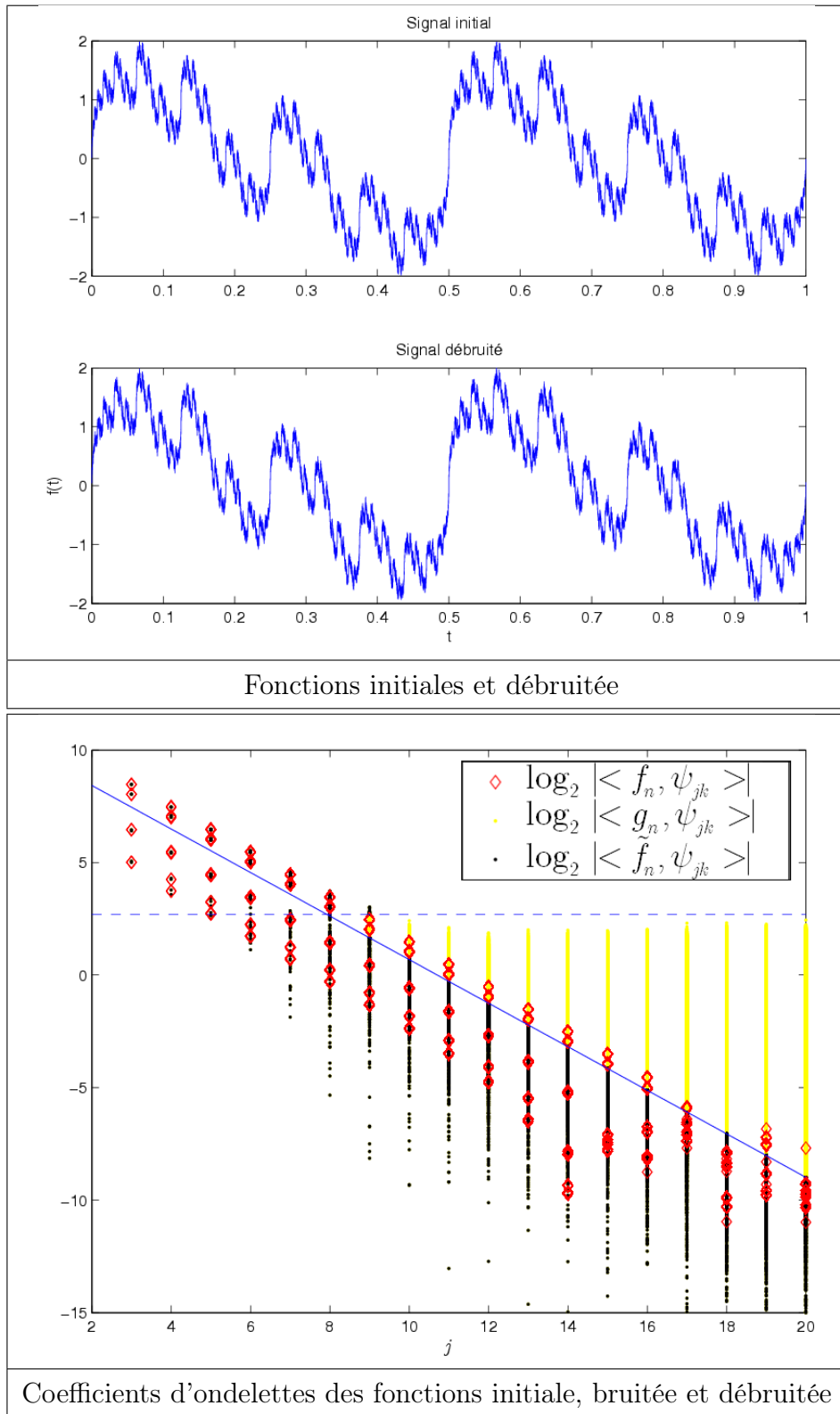


FIG. 5.11 – Weierstrass de  $2^{21}$  points et d'exposant  $\alpha_g(f) = 0.5$

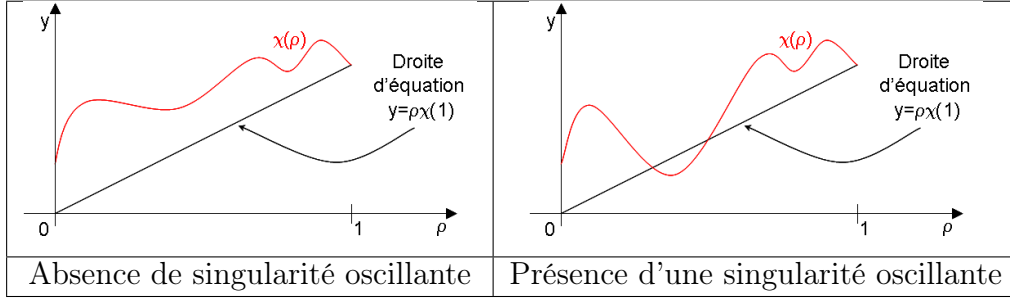


FIG. 5.12 – Visualisation du caractère oscillant ( $\beta_0 > 0$ ) sur le spectre 2-microlocal.

**Proposition 5.8.** *Si  $\alpha_g(f) > 0$  alors*

$$\alpha_p(f, x_0) = \min \left\{ \frac{\chi(\rho, f)}{\rho} : \rho \in (0, 1] \right\}$$

**Proposition 5.9.** *Si  $\alpha_p(f, x_0) < \infty$  alors  $\beta_o(f, x_0)$  est le plus petit nombre  $\beta$  vérifiant :*

$$\chi\left(\frac{1}{\beta+1}, f\right) = \frac{\alpha_p(f, x_0)}{\beta+1}.$$

On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

**Corollaire 5.2.** *Si  $\alpha_p(f, x_0) < \infty$  et  $\alpha_g(f) > 0$  alors :  $x_0$  est une singularité oscillante si et seulement s'il existe  $\rho \in (0, 1)$  tel que  $\chi(\rho, f) < \rho\chi(1, f)$ .*

On peut interpréter graphiquement le corollaire 5.2 : considérons la droite passant par les points  $(0,0)$  et  $(1, \chi(1))$ .  $x_0$  est une singularité oscillante si et seulement si la courbe d'équation  $y = \chi(\rho)$  passe en dessous de cette droite (voir figure 5.12).

En termes de coefficients d'ondelettes et grossièrement parlant, le caractère de singularité oscillante en  $x_0$  reflète la présence de gros coefficients d'abscisse proche de  $x_0$  mais hors du cône d'influence  $\{(2^{-j}, k2^{-j}) : |k2^{-j} - x_0| \leq 2^{-j}\}$ , en l'absence de gros coefficients dans ce cône d'influence (voir figure 5.13).

Définissons le seuillage en  $2^{-j\gamma}$  :

**Définition 5.1.** *Soit  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , telle que  $\|\psi\|_2 = 1$ ,  $\psi_{jk}$  définies par l'équation 2.8 et  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . On rappelle que  $f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{jk} \psi_{j,k}$ , où  $d_{j,k} = \langle f, \psi_{j,k} \rangle$ .*

*La fonction  $f^t$  obtenue après un seuillage d'ordre  $\gamma$  est définie par :*

$$f^t = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{jk}^t \psi_{j,k} \text{ où } d_{jk}^t = d_{jk} \cdot 1_{|d_{jk}| > 2^{-j\gamma}}$$

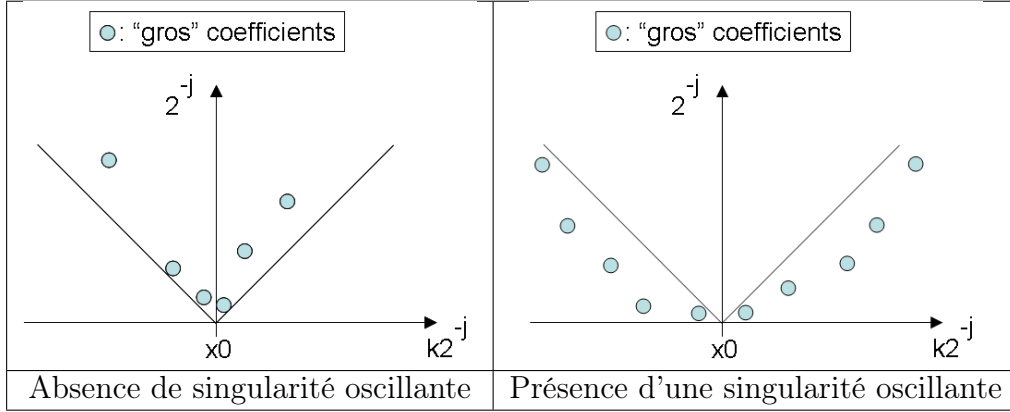


FIG. 5.13 – Visualisation du caractère oscillant ( $\beta_0 > 0$ ) sur les coefficients d'ondelettes.

Le résultat suivant, énoncé dans [LS04] et [Seu03] (th. 6.2 p. 138), montre qu'un seuillage en  $2^{-j\gamma}$  a tendance à créer des singularités oscillantes :

**Théorème 5.7.** *Soit  $f \in C^\epsilon([0, 1])$ . Soit  $f^t$  la fonction obtenue après un seuillage de  $f$  d'ordre  $\gamma < h$ . Alors, pour tout  $x_0 \in (0, 1)$  tel que  $\alpha_p(f, x_0) < \gamma$  : ou bien  $\alpha_p(f^t, x_0) = +\infty$ , ou bien  $x_0$  est une singularité oscillante de  $f^t$ .*

La démonstration de ce théorème est facilitée par l'usage du spectre 2-micro-local. Une proposition évidente nous donne l'effet d'un seuillage en  $2^{-j\gamma}$  sur ce spectre :

**Proposition 5.10.** *Soit  $f \in C^\epsilon([0, 1])$  et  $f^t$  la fonction obtenue par seuillage en  $2^{-j\gamma}$ . En tout point  $x_0$  et pour tout  $\rho \in [0, 1]$  le spectre 2-microlocal de  $f^t$  vérifie :*

- Si  $\chi(\rho, f) < \gamma$  alors  $\chi(\rho, f^t) = \chi(\rho, f)$
- Si  $\chi(\rho, f) > \gamma$  alors  $\chi(\rho, f^t) = +\infty$

Le théorème 5.7 devient alors évident : d'après la proposition 5.8 :  $\chi(1) \geq \alpha_p(f, x_0)$ , donc  $\chi(1, f) > \gamma$ . Avec le second point de la proposition 5.10, il vient :  $\chi(1, f^t) = +\infty$ .

Si pour tout  $\rho \in (0, 1]$ ,  $\chi(\rho, f^t) = +\infty$ , alors  $\alpha_p(f^t, x_0) = +\infty$  (d'après la proposition 5.8). Sinon, on peut appliquer le corollaire 5.2 : comme  $\chi(1) = +\infty$  et comme il existe  $\rho \in (0, 1)$  tel que  $\chi(\rho) < +\infty$ ,  $x_0$  est une singularité oscillante.

Remarquons que l'hypothèse  $\alpha_p(f, x) < \gamma$  du théorème 5.7 peut être remplacée par l'hypothèse plus faible  $\chi(1) < \gamma$ , c'est à dire :  $\beta_\omega(f, x_0) < \gamma$ , d'après la proposition 2.5.

Le théorème 5.7 s'interprète assez simplement : par hypothèse,  $\chi(1) < \gamma$ , donc tous les coefficients dans le cône d'influence de  $x_0$  sont seuillés. Si tous les autres coefficients sont seuillés,  $\alpha_p(f^t, x_0) = \infty$ . Sinon,  $x_0$  est une singularité oscillante.

On veut examiner dans quelle mesure il est possible d'étendre ce raisonnement au seuillage en  $2^{-n/2}\sqrt{2n \ln 2}$ . Pour rester dans des raisonnements relativement simples, on va supposer fixé  $r > 0$  assez petit pour avoir  $\chi^r(\rho) \simeq \chi(\rho)$  pour tout  $\rho \in (0, 1]$ . Ainsi, on dira que  $x_0$  est une singularité oscillante "à la résolution  $r$ " si il existe  $\rho \in (0, 1 - r)$  tel que

$$\chi^r(\rho, f) < \rho \chi^r(1, f).$$

Ceci permet de se ramener à des raisonnements similaires à ceux de la partie précédente : pour tout  $\rho > 0$ , les  $\chi^r(\rho, f)$  peuvent s'écrire sous la forme suivante, très proche de celle de  $\alpha_g(f, x_0)$  (equation (5.1)) :

$$\chi^r(\rho, f) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \min \left\{ \frac{\log_2 |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|}{-j} : k \text{ tel que } (2^{-j}, |k2^{-j} - x_0|) \in D_{[\rho-r, \rho+r]} \right\}. \quad (5.19)$$

L'expression de  $\chi^r(\rho, f)$  pour  $\rho > 0$  est la même que celle de l'exposant de Hölder global, à ceci près qu'il faut remplacer le minimum sur  $k \in \mathbb{Z}$  par un minimum sur  $k$  tel que  $(j, k) \in D_{[\rho-r, \rho+r]}$ . De manière analogue à la partie 5.2, on définit donc le spectre "à l'échelle  $j$ " :

$$\chi^r(\rho, j, f) = \min \left\{ \frac{\log_2 |\langle f, \psi_{(j,k)} \rangle|}{-j} : k \text{ tel que } (2^{-j}, |k2^{-j} - x_0|) \in D_{[\rho-r, \rho+r]} \right\}. \quad (5.20)$$

et le spectre "entre deux échelles" :

$$\chi^r(\rho, j_1, j_2, f) = \min_{j \in [j_1 \dots j_2]} \min \left\{ \frac{\log_2 |\langle f, \psi_{(j,k)} \rangle|}{-j} : k \text{ tel que } (2^{-j}, |k2^{-j} - x_0|) \in D_{[\rho-r, \rho+r]} \right\}. \quad (5.21)$$

Le caractère oscillant "entre deux échelles" peut être interprété comme la présence de gros coefficients entre ces deux échelles et hors du cône d'influence, en l'absence de gros coefficients dans ce cône d'influence.

On dira que  $x_0$  est une singularité oscillante de  $f$  "à la résolution  $r$  et entre les échelles  $h(n)$  et  $n$ " si il existe  $\rho \in (0, 1 - \epsilon)$  tel que

$$\chi^r(\rho, h(n), n, f) < \rho \chi^r(1, h(n), n, f).$$

### 5.8.2 Effet d'un seuillage en $2^{-n/2} \sqrt{2n \ln 2}$

On peut se demander si l'application d'un seuillage peut créer des oscillations. Pour cela, on va étudier la convergence des suites  $\chi^r(h(n), n, \tilde{f}_n)$  où  $\tilde{f}_n$  est la fonction initiale bruitée puis seuillée.

Dans les parties précédentes, on a étudié les fonctions  $g_n$  définies par l'équation (5.8).

Ici, pour simplifier, on néglige la différence  $\langle f - f_n, \psi_{jk} \rangle$ . Il faudrait soigneusement justifier cette simplification, mais nous nous contenterons des arguments euristiques suivants : les gros coefficients d'ondelettes  $\langle f, \psi_{jk} \rangle$  sont de l'ordre de  $2^{-j\chi^\epsilon(\rho, f) - j/2}$ , les coefficients du bruit sont de l'ordre de  $2^{-n/2}$  et la différence  $\langle f - f_n, \psi_{jk} \rangle$  est de l'ordre de  $2^{-n\alpha_l(f, x_0) - j/2}$ . Cette approximation est par exemple justifiée dans le cas où  $\alpha_l(f, x_0) \geq 1/2$ , auquel cas  $\langle f - f_n, \psi_{jk} \rangle$  est négligeable devant les coefficients du bruit, ou bien si  $\alpha_l(f, x_0) < 1/2$  et si  $\chi$  ne varie pas trop, c'est à dire si  $\chi^\epsilon(\rho, f) < \frac{\alpha_l(f, x_0)}{1 - 2\alpha_l(f, x_0)}$ , auquel cas  $\langle f - f_n, \psi_{jk} \rangle$  sera négligeable devant  $2^{-j\chi(\rho, f)}$  pour les valeurs de  $j$  inférieures à l'échelle de coupure et devant les coefficients du bruit pour les valeurs de  $j$  comprises entre cette valeur et  $n$ .

On étudie donc la suite de fonctions  $(g_n)_n$  définie par :

$$\langle g_n, \psi_{jk} \rangle = \langle f, \psi_{jk} \rangle + 2^{-n/2} b_{jk}^n \quad (5.22)$$

**Théorème 5.8.** *Soit  $f$  un signal dans  $C^{\alpha_0}(\mathbb{R})$  avec  $\alpha_0 > 0$ . Soit  $g_n$  le signal bruité défini par l'équation (5.22). Soit  $\alpha_g(f)$  l'exposant de Hölder global de  $f$ . Soit  $\tilde{f}_n$  le signal débruité par la méthode du seuillage dur, avec le seuil  $\lambda_n = 2^{-n/2} \sqrt{2n \ln 2}$  :*

$$\langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle = \begin{cases} \langle g_n, \psi_{jk} \rangle & \text{si } |\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| > \lambda_n \\ 0 & \text{si } |\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| \leq \lambda_n \end{cases}$$



Soit  $\sigma$  croissante, telle que  $\chi^r(\rho, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \chi^r(\rho, \sigma(n), f)$ . Alors, si  $h$  vérifie :

$$\exists \epsilon_0 > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N} : \sigma(k) \in \left[ h(n) \dots \frac{n}{1 + 2\chi^r(\rho, f)} (1 - \epsilon_0) \right] \quad (5.23)$$

alors :  $\chi^r(\rho, h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend en probabilité vers  $\chi^r(\rho, f)$ .

En revanche, si  $h$  vérifie :

$$\exists \epsilon_0 > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : h(n) \geq \frac{n}{1 + 2\chi^r(\rho, f)} (1 + \epsilon_0) \quad (5.24)$$

alors :  $\chi^r(\rho, h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend en probabilité vers  $+\infty$ .

Les lemmes 5.6, 5.7 et 5.8 sont les équivalents respectifs des lemmes 5.3, 5.4 et 5.5 pour les  $\chi^r(\rho, \tilde{f}_n)$ . Leurs démonstrations sont analogues.

**Lemme 5.6.** Pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$P \left( \forall j \geq \frac{n}{1 + 2\chi^r(\rho, f)} (1 + \epsilon) \quad \forall k \text{ tel que } (2^{-j}, k2^{-j} - x_0) \in D_{[\rho-\epsilon, \rho+\epsilon]} : \right. \\ \left. \langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle = 0 \right) \rightarrow 1 \quad (5.25)$$

*Preuve.* Soit  $\eta$  assez petit pour que  $(1 + \epsilon) \frac{\chi^r(\rho, f) + 1/2 - \eta}{\chi^r(\rho, f) + 1/2} > 1$ . Ceci implique que, pour  $n \geq N_1$ ,

$$\frac{n}{1 + 2\chi^r(\rho, f)} (1 + \epsilon) (\chi^r(\rho, f) + 1/2 - \eta) \geq \frac{n + \ln(8n \ln 2)}{2}.$$

Or, par définition de  $\chi^r(\rho, f)$ , il existe  $N_2$  tel que pour  $n \geq N_2$ , pour  $j \geq \frac{n}{1 + 2\alpha_g(f)} (1 + \epsilon)$  et pour tout  $k$  tel que  $(2^{-j}, k2^{-j} - x_0) \in D_{[\rho-\epsilon, \rho+\epsilon]}$  :

$$\begin{aligned} |\langle f, \psi_{jk} \rangle| &\leq 2^{-j(\alpha_g(f) + 1/2 - \eta)} \\ &\leq 2^{-\frac{n}{1 + 2\alpha_g(f)} (1 + \epsilon)(\alpha_g(f) + 1/2 - \eta)} \end{aligned}$$

On en déduit que, pour tout  $n \geq \max(N_1, N_2)$ , pour tout  $j \geq \frac{n}{1 + 2\alpha_g(f)} (1 + \epsilon)$  et pour tout  $k$  :

$$\begin{aligned} |\langle f, \psi_{jk} \rangle| &\leq 2^{-\frac{n + \ln(8n \ln 2)}{2}} \\ &\leq \lambda_n - 2^{-n/2} \sqrt{2n \ln 2 - 1} \end{aligned}$$

De plus, en utilisant le fait 5.1 avec  $\epsilon_n = e$ , il vient

$$P \left( \forall j \geq \frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1+\epsilon), k \text{ tel que } (2^{-j}, k2^{-j} - x_0) \in D_{[\rho-\epsilon, \rho+\epsilon]} : \right. \\ \left. |\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| \leq \lambda_n \right) \rightarrow 1 \quad (5.26)$$

et le résultat.  $\square$

**Lemme 5.7.** *Pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $\epsilon > 0$  tel que, pour toute suite  $h(n)$  qui tend vers l'infini il existe presque sûrement  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  :*

$$\forall j \in \left[ h(n) \dots \frac{n}{1+2\chi^r(\rho, f)}(1+\epsilon) \right] \forall k \text{ tel que } (2^{-j}, k2^{-j} - x_0) \in D_{[\rho-\epsilon, \rho+\epsilon]} : \\ \left| \langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle \right| \leq 2^{-j(\chi^r(\rho, f) + 1/2 - \eta)} \quad (5.27)$$

*Preuve.* Soit  $\eta > 0$ . Soit  $\epsilon$  tel que  $\frac{1+\epsilon}{1+2\chi^r(\rho, f)} \cdot (\chi^r(\rho, f) + 1/2 - \eta) = 1/2 - \gamma$ , où  $\gamma > 0$ .

Alors, pour tout  $j < \frac{(1+\epsilon)n}{1+2\chi^r(\rho, f)}$  :

$$2^{-j(\chi^r(\rho, f) + 1/2 - \eta)} \geq 2^{-n/2} \cdot 2^{\gamma \cdot n}.$$

Par le lemme 5.2, on en déduit que presque sûrement, il existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N_1$  :

$$2^{-n/2} |b_{jk}^n| \leq 1/2 \cdot 2^{-j(\chi^r(\rho, f) + 1/2 - \eta)}.$$

De plus, par définition de  $\chi^r(\rho, f)$ , il existe  $N_2$  tel que, pour tout  $n \geq N_2$ , pour tout  $j \geq h(n)$  et pour tout  $k$  tel que  $(2^{-j}, k2^{-j} - x_0) \in D_{[\rho-\epsilon, \rho+\epsilon]} : |\langle f, \psi_{jk} \rangle| \leq 1/2 \cdot 2^{-j(\chi^r(\rho, f) + 1/2 - \eta)}$ . On en déduit le résultat par définition de  $g_n$  puis en remarquant que  $\left| \langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle \right| \leq |\langle g_n, \psi_{jk} \rangle|$ .  $\square$

**Lemme 5.8.** *Si l'équation (5.9) est vérifiée, alors pour tout  $\eta > 0$ , presque sûrement, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour  $n \geq N$ , il existe  $j_n \in \left[ h_n \dots \frac{n}{1+2\alpha_g(f)}(1-\epsilon_0) \right]$  et  $k_n$  tel que  $(2^{-j_n}, k_n 2^{-j_n} - x_0) \in D_{[\rho-r, \rho+r]}$  et :*

$$\left| \langle \tilde{f}_n, \psi_{j_n k_n} \rangle \right| \geq 2^{-j_n(1/2 + \chi^r(\rho, f) + \eta)}$$

*Preuve.* Soit  $(j_n, k_n)$  une suite telle que  $j_n \in \left[ h_n \dots \frac{n}{1+2\chi^r(\rho, f)}(1-\epsilon_0) \right]$ , vérifiant

aussi  $(2^{-j_n}, k_n 2^{-j_n - x_0}) \in D_{[\rho-r, \rho+r]}$  et  $\chi^r(\rho, f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |\langle f, \psi_{j_n k_n} \rangle|}{j_n} + 1/2$ . Choisissons  $\eta > 0$  suffisamment petit pour avoir :  $(1 - \epsilon_0)(1 + \frac{\eta}{1/2 + \chi^r(\rho, f)}) = 1 - 2\gamma$  où  $\gamma > 0$ . Pour  $n$  assez grand

$$|\langle f, \psi_{j_n k_n} \rangle| \geq 2 \cdot 2^{-n/2 + \gamma \cdot n}.$$

On en déduit grâce au lemme 5.2, que, presque sûrement, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$  :  $2^{-n/2} |b_{j_n k_n}^n| \leq 1/2 \cdot |\langle f, \psi_{j_n k_n} \rangle|$ , si bien que

$$|\langle g_n, \psi_{j_n k_n} \rangle| \geq 2^{-j_n(\chi^r(\rho, f) + 1/2 + \eta)}.$$

Supposons que cet évènement est réalisé et remarquons que  $2^{-j_n(\chi^r(\rho, f) + \frac{1}{2} + \eta)} \geq 2^{-n/2 + \gamma \cdot n} > \lambda_n$  pour  $n$  assez grand : les coefficients d'ondelette  $\langle g_n, \psi_{j_n k_n} \rangle$  ne sont pas seuillés et  $\langle \tilde{f}_n, \psi_{j_n k_n} \rangle = \langle g_n, \psi_{j_n k_n} \rangle$ , d'où le résultat.  $\square$

*Démonstration du théorème 5.8 :*

D'après le lemme 5.6,  $\chi_\epsilon(h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend en probabilité vers  $+\infty$  quand  $h$  vérifie (5.24).

On déduit des lemmes 5.6 et 5.7 que, pour tout  $\eta > 0$

$$P\left(\chi^r(\rho, h(n), n, \tilde{f}_n) \geq \chi^r(\rho, f) - \eta\right) \rightarrow 1.$$

Enfin, on déduit du lemme 5.5 que

$$P\left(\chi^r(\rho, h(n), n, \tilde{f}_n) \leq \chi^r(\rho, f) + \eta\right) \rightarrow 1.$$

Finalement,  $\chi^r(\rho, h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend en probabilité vers  $\chi^r(\rho, f)$  quand  $h$  vérifie (5.23).

Le théorème 5.8 montre qu'il est possible d'introduire des oscillations dans le sens suivant : si le spectre 2-microlocal d'un signal est tel que, pour une valeur de  $\rho \in [0, 1]$ ,  $\chi^r(\rho, f) < \chi^r(1, f)$  alors on peut choisir  $h(n)$  de manière à avoir

$$\frac{n}{1 + 2\chi^r(1, f)}(1 + \epsilon_0) \leq h(n) \leq \frac{n}{1 + 2\chi^r(\rho, f)}(1 - \epsilon_0)$$

Dans ce cas, l'inégalité de gauche implique que  $\chi^r(1, h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend en probabilité vers  $+\infty$ . De plus, l'inégalité de droite fait que la condition (5.23) peut

être satisfaite si  $\sigma$  n'augmente pas trop vite (elle est par exemple satisfaite si  $\sigma(n) = n$ ). Ainsi, la suite  $\chi^r(\rho, h(n), n, f)$  tendra vers  $\chi^r(\rho, f)$  et on aura bien  $\chi^r(\rho, h(n), n, f) < \rho \chi^r(1, h(n), n, f)$  avec une probabilité qui tend vers 1. En d'autres termes, pour les échelles situées entre  $h(n)$  et  $n$ , tous les coefficients du cône d'influence seront seuillés, alors qu'on trouvera des coefficients non seuillés hors de ce cône d'influence.

### 5.8.3 Effet d'un seuillage en $2^{-j\delta}$

Dans le cas d'un seuillage en  $2^{-j\delta}$ , la situation en ce qui concerne  $\chi^r(\rho)$  est analogue à celle du paragraphe 5.5.2 : si  $\delta > 1/2$  alors le seuil en  $2^{-j\delta}$  va être inférieur aux coefficients de rang  $n$ . Dans ce cas, les  $\chi^\epsilon(\rho, h(n), n, \tilde{f}_n)$  tendront tous vers 0. On se retrouve dans le cas d'une fonction dont les coefficients à l'échelle  $n$  sont ceux d'un bruit blanc. La caractérisation d'une singularité oscillante ne s'applique donc pas. En revanche, si  $\delta < 1/2$ , alors tous les coefficients sont seuillés à partir d'un certain rang fini. Les  $\chi^\epsilon(h(n), n, \tilde{f}_n)$  tendront tous vers  $+\infty$ .

**Proposition 5.11.** *Soit  $f$  un signal dans  $C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$  avec  $\epsilon_0 > 0$ . Soit  $g_n$  le signal bruité défini par l'équation (5.8).*

*Soit  $\tilde{f}_n$  le signal débruité par la méthode du seuillage dur, avec le seuil :  $\lambda_j = 2^{-j\delta}$ . Soit  $h(n)$  une fonction croissante qui tend vers  $+\infty$ ,  $h(n) \leq n$ .*

*Si  $\delta > 1/2$  alors pour tout  $\rho$  et  $\epsilon > 0$  tel que  $\rho - \epsilon > 0$  : presque sûrement  $\chi^r(\rho, h(n), n, \tilde{f}_n) \rightarrow 0$ .*

*Preuve.* La démonstration est identique à celle de la proposition 5.5, en remplaçant  $\langle g_n, \psi_{n0} \rangle$  par  $\langle g_n, \psi_{nk(n)} \rangle$  où  $k(n)$  est une suite telle que  $(2^{-n}, k2^{-n}) \in D([\rho - \epsilon, \rho + \epsilon])$ .  $\square$

**Proposition 5.12.** *Soit  $f$  un signal dans  $C^{\epsilon_0}(\mathbb{R})$  avec  $\epsilon_0 > 0$ . Soit  $g_n$  le signal bruité défini par l'équation (5.8).*

*Soit  $\tilde{f}_n$  le signal débruité par la méthode du seuillage dur, avec le seuil :  $\lambda_j = 2^{-j\delta}$ . Soit  $h(n)$  une fonction croissante qui tend vers  $+\infty$ ,  $h(n) \leq n$ .*

*Si  $\delta < 1/2$  alors pour tout  $\rho$  et  $\epsilon > 0$  tel que  $\rho - \epsilon > 0$  : presque sûrement  $\chi^r(\rho, h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend vers  $+\infty$ .*

*Preuve.* Le résultat obtenu dans la démonstration de la proposition 5.6 : presque sûrement, pour  $n$  assez grand,  $\left| \langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle \right| \leq 2^{-j\delta}$  nous permet également de

déduire le résultat. □

## 5.9 Débruitage en un point

### 5.9.1 Etude théorique

On peut chercher à généraliser le raisonnement de la partie 5.7. On peut chercher à retrouver les  $\chi^r(\rho_i)$  pour  $\rho \in \{\rho_1 \dots \rho_N\}$ , où les  $(\rho_i - r, \rho_i + r]$  réalisent une partition de  $(0, 1]$ .

En fait, il est malcommode de prescrire  $\chi^r(\rho_i)$ , à cause du fait que les intervalles fermés  $[\rho_i - r, \rho_i + r]$  ne peuvent pas réaliser une partition de  $(0, 1]$ , ni même de  $[0, 1]$ . On va donc chercher en fait à prescrire les coefficients d'ondelette sur des ensembles  $D_I$  (définis par 4.26), où  $I$  n'est plus un intervalle fermé, mais un intervalle semi-ouvert de la forme  $(\rho - r, \rho + r]$ . Pour avoir des notations plus commodes, on pose donc :

$$\hat{\chi}^r(\rho, f) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \min \left\{ \frac{\log_2 |\langle f, \psi_{j,k} \rangle|}{-j} : k \text{ tel que } (2^{-j}, |k2^{-j} - x_0|) \in D_{(\rho-r, \rho+r]} \right\}. \quad (5.28)$$

et

$$\hat{\chi}^r(\rho, j_1, j_2, f) = \min_{j \in [j_1 \dots j_2]} \min \left\{ \frac{\log_2 |\langle f, \psi_{(j,k)} \rangle|}{-j} : k \text{ tel que } (2^{-j}, |k2^{-j} - x_0|) \in D_{(\rho-r, \rho+r]} \right\}. \quad (5.29)$$

On va donc chercher à prescrire les coefficients d'ondelettes de manière à avoir  $\hat{\chi}^r(\rho, h(n), n, \tilde{f}) \simeq \hat{\chi}^r(\rho, f)$ , afin de retrouver le caractère oscillant ou non de la fonction considérée au point  $x_0$ .

Pour ceci, on va chercher, de même que précédemment, à “compléter” les coefficients qui sont noyés dans le bruit de manière qu'ils soient cohérents avec les valeurs de  $\hat{\chi}^r(\rho)$ . On commence par considérer que l'on cherche uniquement à retrouver  $\hat{\chi}^r(\rho)$  pour un  $\rho$  fixé, puis on prescrit les  $\hat{\chi}^{r_i}(\rho_i)$ , où les  $(\rho_i - r_i, \rho_i + r_i]$  réalisent une partition de  $(0, 1]$ .

**Proposition 5.13.** *Soit  $f$  un signal dans  $C^{\alpha_0}(\mathbb{R})$  avec  $\alpha_0 > 0$ . Soit  $g_n$  le signal bruité défini par l'équation (5.22). Soit  $(s_n)_n$  une suite qui tend presque sûrement (resp. en probabilité) vers  $\hat{\chi}^r(\rho, f)$ .*

$$\text{Soit } c(n) = \frac{n}{1+2s_n}$$

*Si  $\tilde{f}_n$  est telle que, pour tout  $(j, k)$  vérifiant  $(2^{-j}, |k2^{-j} - x_0|) \in D_{(\rho-r, \rho+r]} :$*

$$\langle \tilde{f}_n, \psi_{jk} \rangle = \begin{cases} \langle g_n, \psi_{jk} \rangle & \text{si } j \leq c(n) \\ \min(|\langle g_n, \psi_{jk} \rangle|, 2^{-j(s_n+1/2)}) \operatorname{sgn}(\langle g_n, \psi_{jk} \rangle) & \text{si } j > c(n) \end{cases} \quad (5.30)$$

*Alors, pour toute fonction  $h$  qui tend vers  $+\infty$ ,  $\hat{\chi}^r(\rho, h(n), n, \tilde{f}_n)$  tend presque sûrement (resp. en probabilité) vers  $\hat{\chi}^r(\rho, f)$*

*Preuve.* Soit  $h$  une fonction qui tend vers l'infini.

Fixons  $\eta > 0$ .

Il existe  $j_0 > 0$  et  $\epsilon > 0$  tels que : presque sûrement, pour  $n$  assez grand : pour tout  $j \in [j_0 \dots \frac{n}{1+2\hat{\chi}^r(\rho, f)}(1+\epsilon)]$ , si  $(2^{-j}, k2^{-j} - x_0) \in D_{(\rho-r, \rho+r]} :$

$$|\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| \leq 2.2^{-j(\hat{\chi}^r(\rho, f)+1/2-\eta)}.$$

Comme  $s_n$  tend presque sûrement vers  $\hat{\chi}^r(\rho, f)$ ,  $c_n$  tend presque sûrement vers  $\frac{n}{1+2\hat{\chi}^r(\rho, f)}$  donc presque sûrement, pour  $n$  assez grand :

$$c(n) \leq \frac{n}{1+2\hat{\chi}^r(\rho, f)}(1+\epsilon).$$

Par définition de  $g$ , on en déduit que  $\forall j \in [j_0 \dots c(n)]$  : si  $(2^{-j}, k2^{-j} - x_0) \in D_{(\rho-r, \rho+r]}$  alors

$$|\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| \leq 2.2^{-j(\hat{\chi}^r(\rho, f)+1/2-\eta)}.$$

De plus, pour tout  $j > c(n)$  et  $(2^{-j}, k2^{-j} - x_0) \in D_{(\rho-r, \rho+r]} : |\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| \leq 2^{-s_n}$  donc presque sûrement pour  $n$  assez grand :

$$|\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| \leq 2^{-j(\hat{\chi}^r(\rho, f)+1/2-\eta)}.$$

Finalement :  $\forall j \in [j_0 \dots n]$ , si  $(2^{-j}, k2^{-j} - x_0) \in D_{(\rho-r, \rho+r]}$  alors

$$|\langle g_n, \psi_{jk} \rangle| \leq 2.2^{-j(\hat{\chi}^r(\rho, f)+1/2-\eta)}.$$

On en déduit que  $\hat{\chi}^r(\rho, h(n), n, \tilde{f}_n) \geq \hat{\chi}^r(\rho, f) - \eta$ .

Soit  $k(n)$  une suite telle que  $(2^{-n}, k(n)2^{-n}) \in D_{(\rho-r, \rho+r]}$ . De façon identique au lemme 5.1 : presque sûrement, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  :  $|\langle g_n, \psi_{nk(n)} \rangle| \geq 2^{-n(\eta+1/2)}$ , ce qui implique

$$|\langle \tilde{f}_n, \psi_{nk(n)} \rangle| = 2^{-j(s_n+1/2)}.$$

Comme  $s_n$  tend presque sûrement vers  $\hat{\chi}^r(\rho)$ ,  $|\langle \tilde{f}_n, \psi_{nk(n)} \rangle|$  tend presque sûrement vers  $2^{-j(\hat{\chi}^r(\rho)+1/2)}$  donc  $\hat{\chi}^r(\rho, h(n), n, g_n) \leq \hat{\chi}^r(\rho, f) + \eta$  presque sûrement quand  $n \rightarrow \infty$ .

La démonstration est identique en remplaçant l'hypothèse :  $(s_n)_n$  tend presque sûrement vers  $\hat{\chi}^r(\rho, f)$  par  $(s_n)_n$  tend en probabilité vers  $\hat{\chi}^r(\rho, f)$ .  $\square$

**Théorème 5.9.** *Soit  $f$  un signal dans  $C^{\alpha_0}(\mathbb{R})$  avec  $\alpha_0 > 0$ . Soit  $g_n$  le signal bruité défini par l'équation (5.22).*

*Pour tous  $\rho = [\rho_1 \dots \rho_m]$  et  $r = [r_1 \dots r_m]$  tels que les  $(\rho_i - r_i, \rho_i + r_i]$  forment une partition de  $(0, 1]$ , pour toute suite  $(s_n)_n$  où  $s_n = [s_n(1) \dots s_n(m)]$  est un élément de  $\mathbb{R}^m$ , on pose :  $c_n(i) = \frac{n}{1+2s_n(i)}$  pour  $i = 1..m$  et on définit la fonction débruitée  $\tilde{f}_n^{r,s}$  ainsi : pour tout couple  $(j, k)$  tel que  $(2^{-j}, k2^{-j} - x_0) \in D_{[\rho_i - r_i, \rho_i + r_i]}$  :*

$$\langle \tilde{f}_n^{r,s}, \psi_{jk} \rangle = \begin{cases} \langle g_n, \psi_{jk} \rangle & \text{si } j \leq c_n(i) \\ \min(|\langle g_n, \psi_{jk} \rangle|, 2^{-j(s_n(i)+1/2)}) \operatorname{sgn}(\langle g_n, \psi_{jk} \rangle) & \text{si } j > c_n(i) \end{cases} \quad (5.31)$$

*On montre alors les résultats suivants :*

- Si

$$\min_{\rho \in (0,1]} \frac{\chi(\rho)}{\rho} < \chi(1)$$

*alors il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $r = [r_1 \dots r_m]$ ,  $\max_{i=1..m} r_i < \epsilon_0$  implique que, pour toute suite  $(s_n(i))_n$  qui tend presque sûrement (resp. en probabilité) vers  $\chi^{r_i}(\rho_i, f)$  pour  $i = 1..m$ , pour toute fonction  $h(n)$  et pour tout  $\epsilon < \epsilon_0$ , la proposition :*

$$\min_{\rho \in (0,1]} \frac{\chi^\epsilon(\rho, h(n), n, \tilde{f}_n^{r,s})}{\rho} < \chi^\epsilon(1, h(n), n, \tilde{f}_n^{r,s})$$

*est vérifiée presque sûrement (resp. en probabilité) pour  $n$  assez grand.*

- Pour tout  $\eta > 0$  tel que

$$\min_{\rho \in (0, 1-\eta]} \frac{\chi(\rho)}{\rho} > \chi(1)$$

il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $r = [r_1 \dots r_m]$ ,  $\max_{i=1..m} r_i < \epsilon_0$  implique que, pour toute suite  $(s_n(i))_n$  qui tend presque sûrement (resp. en probabilité) vers  $\chi^{r_i}(\rho_i, f)$  pour  $i = 1..m$ , pour toute fonction  $h(n)$  et pour tout  $\epsilon < \epsilon_0$ , la proposition :

$$\min_{\rho \in (0, 1-2\eta]} \frac{\chi^\epsilon(\rho, h(n), n, \tilde{f}^{r,s})}{\rho} > \chi^\epsilon(1, h(n), n, \tilde{f}^{r,s})$$

est vérifiée presque sûrement (resp. en probabilité) pour  $n$  assez grand.

En d'autres termes :

- Si le signal initial comporte des oscillations, alors on peut choisir les  $r_i$  assez serrés pour que, pour tout  $\epsilon$  assez petit,  $\tilde{f}^{r,s}$  comporte des oscillations à la résolution  $\epsilon$  entre  $h(n)$  et  $n$ .
- Si le signal initial vérifie une condition très légèrement plus faible que l'absence d'oscillations (il pourrait se trouver des valeurs de  $\rho$  dans le petit intervalle  $(1 - \eta, 1]$  qui le rendraient oscillant), alors on peut choisir les  $r_i$  assez serrés pour que le signal débruité vérifie une condition très légèrement plus faible que l'absence d'oscillations (il pourrait se trouver des valeurs de  $\rho$  dans le petit intervalle  $(1 - 2\eta, 1]$  qui le rendent oscillant).

Les cas "dégénérés" où le signal est oscillant à cause de valeurs de  $\rho$  proches de 1 signifient que les gros coefficients d'ondelettes sont très proches du cône d'influence, mais à l'extérieur. L'impression visuelle donnée devrait être assez semblable au cas où ces coefficients sont à l'intérieur du cône d'influence, et où le signal n'est pas oscillant.

*Preuve.* On commence par le premier point. Par hypothèse, il existe  $\rho_0 \in (0, 1)$  tel que  $\chi(\rho_0, f) < \rho_0 \chi(1, f)$ .

Il existe donc  $\epsilon_0 > 0$  tel que :

$$\chi(\rho_0, f) < (\rho_0 - \epsilon_0) \hat{\chi}^{2\epsilon_0}(1, f) - 2\epsilon_0. \quad (5.32)$$

Considérons une fonction débruitée  $\hat{f}^{r,s}$ , où les  $(\rho_i - r_i, \rho_i + r_i]$  forment une



partition de  $(0, 1]$ , avec  $\max r_i < \frac{\epsilon_0}{2}$ , et où la suite  $(s_n(i))_n$  tend presque sûrement vers  $\hat{\chi}^{r_i}(\rho_i, f)$  pour  $i = 1..m$ .

Il existe un indice  $i_0$  tel que  $1 - 2\epsilon_0 \leq \rho_{i_0} - r_{i_0} \leq 1 - \epsilon_0$ .

Alors  $(1 - \epsilon_0, 1] \subset [\rho_{i_0} - r_{i_0}, 1]$  donc :

$$\min_{i=i_0..m} \hat{\chi}^{r_i}(\rho_i, h(n), n, \hat{f}^{rs}) \leq \hat{\chi}^{\epsilon_0}(1, h(n), n, \hat{f}^{rs})$$

On en déduit d'après la proposition 5.13 que, presque sûrement et pour  $n$  assez grand :

$$\min_{i=i_0..m} \hat{\chi}^{r_i}(\rho_i, f) \leq \hat{\chi}^{\epsilon_0}(1, h(n), n, \hat{f}^{rs}) + \epsilon_0$$

Comme  $(\rho_{i_0} - r_{i_0}, 1] \subset [1 - 2\epsilon_0, 1]$  on en déduit :

$$\chi^{2\epsilon_0}(1, f) \leq \hat{\chi}^{\epsilon_0}(1, h(n), n, \hat{f}^{rs}) + \epsilon_0. \quad (5.33)$$

Ainsi, pour tout  $\epsilon \leq \epsilon_0$  :

$$\chi^{2\epsilon_0}(1, f) \leq \hat{\chi}^{\epsilon}(1, h(n), n, \hat{f}^{rs}) + \epsilon_0. \quad (5.34)$$

On en déduit, d'après l'inégalité (5.32) :

$$\chi(\rho_0) \leq (\rho_0 - \epsilon_0) \hat{\chi}^{\epsilon}(1, h(n), n, \hat{f}^{r,s}) - \epsilon_0.$$

On a minoré  $\hat{\chi}^{\epsilon}(1, h(n), n, \hat{f}^{rs})$  à l'aide des valeurs du spectre de  $f$ . Il reste à utiliser la valeur du spectre de  $f$  en  $\rho_0$  pour majorer de façon satisfaisante la valeur de  $\hat{\chi}^{\epsilon}(\rho, h(n), n, \hat{f}^{rs})$  en un point  $\rho$  de  $(0, 1)$ .

Soit  $i_0$  tel que  $\rho_0 \in (\rho_{i_0} - r_{i_0}, \rho_{i_0} + r_{i_0}]$ . Pour tout  $\epsilon < \epsilon_0$

$$\hat{\chi}^{\epsilon}(\rho_{i_0}) \leq \chi(\rho_0)$$

donc, presque sûrement pour  $n$  assez grand :

$$\hat{\chi}^{\epsilon}(\rho_{i_0}) \leq (\rho_0 - \epsilon_0) \hat{\chi}^{\epsilon}(1, h(n), n, \hat{f}^{r,s}) - \epsilon_0$$

$$\hat{\chi}^{\epsilon}(\rho_{i_0}) \leq \rho_{i_0} \hat{\chi}^{\epsilon}(1, h(n), n, \hat{f}^{r,s}) - \epsilon_0$$

Donc, d'après la proposition 5.13, presque sûrement , pour  $n$  assez grand :

$$\hat{\chi}^\epsilon(\rho_{i_0}, h(n), n, \hat{f}^{r,s}) < \rho_{i_0} \hat{\chi}^\epsilon(1, h(n), n, \hat{f}^{r,s})$$

On a montré le premier point.

On suppose maintenant  $\min_{\rho \in (0, 1-\eta]} \frac{\chi(\rho)}{\rho} > \chi(1)$ . Ceci implique l'existence d'un réel  $\epsilon_0 > 0$  et d'un réel  $\delta_0 > 0$  tels que pour tout  $\rho \in (0, 1-\eta]$  et pour tout  $\epsilon < \epsilon_0$  :

$$\chi^\epsilon(\rho) > (\rho + \delta_0)(\chi(1) + \delta_0).$$

En effet, si on suppose le contraire, il existe une suite  $\epsilon_n > 0$ , une suite  $\delta_n$  qui tendent vers 0 et une suite  $\rho_n$  dans  $(0, 1-\eta]$  telles que  $\chi^{\epsilon_n}(\rho_n) \leq (\rho_n + \delta_n)(\chi(1) + \delta_n)$ . On peut extraire de  $\rho_n$  une suite qui tend vers  $\rho_\infty \in \left[\frac{\alpha_l(x_0)}{\chi(1)}, 1-\eta\right]$  et vérifier que  $\frac{\chi(\rho_\infty)}{\rho_\infty} \leq \chi(1)$ , ce qui est contradictoire avec les hypothèses.

Considérons une fonction débruitée  $\hat{f}^{r,s}$ , où les  $(\rho_i - r_i, \rho_i + r_i]$  forment une partition de  $(0, 1]$  , avec  $\max r_i < \min(\epsilon_0, \eta, \delta_0/2)$ , et où la suite  $(s_n(i))_n$  tend presque sûrement vers  $\hat{\chi}^{r_i}(\rho_i, f)$  pour  $i = 1..m$ . D'après ce qui précède, pour tout  $i$  tel que  $\rho_i \in (0, 1-\eta]$  :

$$\hat{\chi}^{r_i}(\rho_i) > (\rho_i + 2r_i)(\chi(1) + \delta_0).$$

On en déduit d'après la proposition 5.13 que presque sûrement, pour  $n$  assez grand et pour tout  $i$  tel que  $\rho_i \in (0, 1-\eta]$  :

$$\hat{\chi}^{r_i}(\rho_i, h(n), n, \tilde{f}^{r,s}) > (\rho_i + r_i)(\chi(1) + \delta_0)$$

Pour tout  $\epsilon < \epsilon_0$ , pour tout  $\rho \in [0, 1-2\eta]$  , il existe  $i$  tel que  $[\rho - \epsilon, \rho + \epsilon] \subset (\rho_i - \epsilon, \rho_i + \epsilon] \cup (\rho_{i+1} - \epsilon, \rho_{i+1} + \epsilon]$  avec  $\rho_{i+1} \in (0, 1-\eta]$ . Donc :

$$\hat{\chi}^\epsilon(\rho, h(n), n, \tilde{f}^{r,s}) > \min(\hat{\chi}^{r_i}(\rho_i, h(n), n, \tilde{f}^{r,s}), \hat{\chi}^{r_{i+1}}(\rho_{i+1}, h(n), n, \tilde{f}^{r,s})).$$

Ainsi,

$$\hat{\chi}^\epsilon(\rho, h(n), n, \tilde{f}^{r,s}) > \rho(\chi(1) + \delta_0).$$

Il ne reste plus qu'à majorer  $\hat{\chi}^\epsilon(1, h(n), n, \tilde{f}^{r,s})$  à l'aide de  $\chi(1)$ . Pour cela, on remarque que  $\chi(1) \geq \hat{\chi}^{r_m}(\rho_m)$ , donc que  $2^{-n(s_m(n)+1/2)} \geq 2^{-n(\chi(1)+1/2)}$ .

Soit  $(k(n))_n$  une suite telle que  $(2^{-n}, k(n)2^{-n})$  est dans  $D_{[1-\epsilon, 1]}$ . Comme  $\epsilon <$

$\rho_m$ , cette suite est aussi dans  $D_{(\rho_m-r_m, \rho_m+r_m]}$  et

$$\left| \left\langle \tilde{f}_n^{r,s}, \psi_{nk(n)} \right\rangle \right| = \min \left( |\langle g_n, \psi_{jk} \rangle|, 2^{-j(s_n(m)+1/2)} \right).$$

Par le même raisonnement que celui du lemme 5.1, on voit que presque sûrement, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  :

$$\left| \langle g_n, \psi_{nk(n)} \rangle \right| \geq 2^{-n(\chi(1)+1/2)}.$$

Finalement,

$$\left| \left\langle \tilde{f}_n^{r,s}, \psi_{nk(n)} \right\rangle \right| \geq 2^{-n(\chi(1)+1/2)}$$

et  $\hat{\chi}^\epsilon(1, h(n), n, \tilde{f}^{r,s}) \leq \chi(1)$ , d'où le résultat. □

## 5.9.2 Applications numériques

On illustre les considérations précédentes avec le cas suivant : la fonction à débruiter est la somme d'un cusp et d'un chirp :

$$f(x) = |x|^\alpha + |x|^{-\beta} \sin |x|^{-\gamma}$$

avec  $\alpha = 0.25$ ,  $\beta = 2$ ,  $\gamma = 0.5$ .

$f$  est représentée figure 5.15. Voir figure 5.14 la représentation de  $\chi(f, \rho)$  en  $x_0 = 0$ . On a  $\chi(1/3, f) = 1/6$ ,  $\chi(1, f) = 1/4$ , et  $\chi(\rho, f) = +\infty$  si  $\rho \notin \{1/3, 1/6\}$ . On constate que  $\min \frac{\chi(f, \rho)}{\rho} = \chi(1)$ , alors que  $\chi(\rho, f)$  atteint son minimum en  $\rho = 1/3$ . On est donc bien dans un cas où la fonction initiale ne présente pas de singularité oscillante (le cusp "l'emporte" sur le chirp), mais où un seuillage peut faire apparaître une singularité oscillante.

On débruite  $g_n = f_n + 2^{-n/2} \mathcal{N}(0, 1)$

On a représenté figure 5.16 les fonctions obtenues après seuillage de  $g_n$ . On peut constater la présence d'oscillations dans le sens suivant : à chaque échelle, il n'y a aucun coefficient d'ondelette dans le cône d'influence de  $x_0$ , alors que des coefficients en dehors de ce cônes sont présents aussi près qu'on veut de  $x_0$  lorsqu'on augmente le nombre de points. De plus, si on représente uniquement les petites échelles des fonction reconstruites (figure 5.17) , alors il ne reste que des

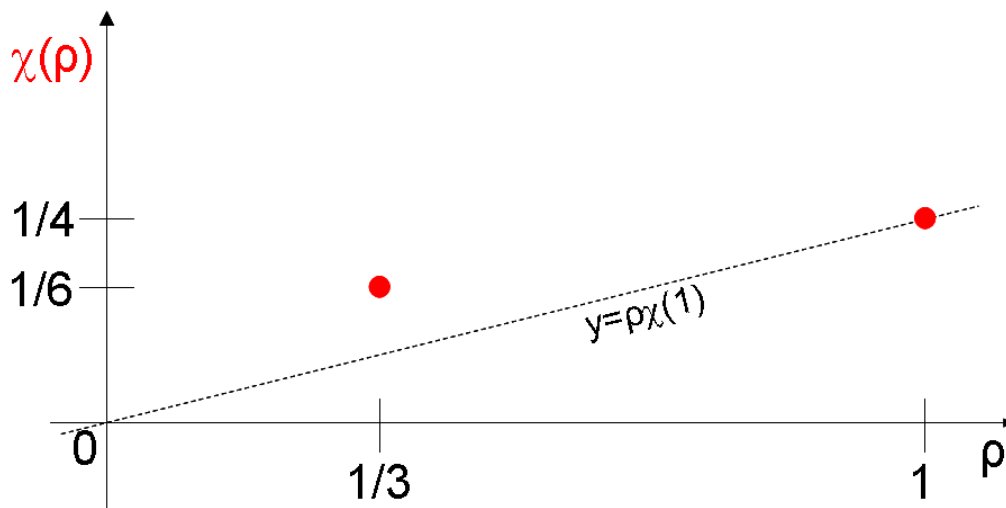


FIG. 5.14 – Spectre 2-microlocal au point  $x_0 = 0$  de la fonction considérée.

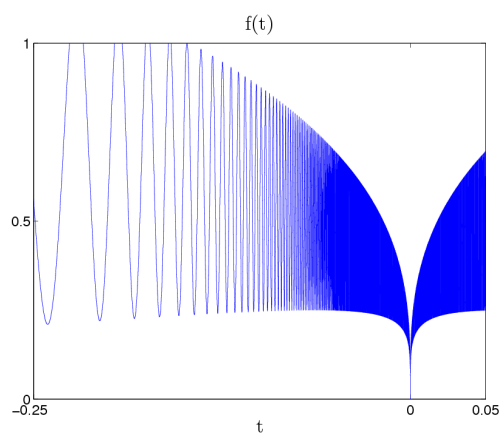


FIG. 5.15 – Représentation de la fonction initiale.

coefficients du chirp. On constate qu'on "tend" vers un comportement analogue à celui du chirp, c'est à dire vers une singularité oscillante.

On a également appliqué la méthode exposée dans la sous-section précédente à cette fonction. On a choisi  $\rho_i = 0.1, 0.3 \dots 0.9$  et  $r_i = 0.1$ . De la même manière qu'à la partie 5.7.2, on effectue une régression linéaire sur les logarithmes des coefficients de  $D_{(\rho_i - r_i, \rho_i + r_i]}$  situés au-dessus de la coupure, puis on prolonge la droite en dessous de cette coupure en prenant le minimum entre la valeur du coefficient bruité et celle "dictée" par la droite.

On constate que la fonction débruitée est plus proche de la fonction initiale que celle obtenue par seuillage (figure 5.18). De plus, les fonctions obtenues après débruitage ne présentent pas l'aspect d'une singularité oscillante, même quand on représente uniquement les petites échelles des fonctions reconstruites (figure 5.19). Ainsi, le comportement de la fonction initiale est conservé.

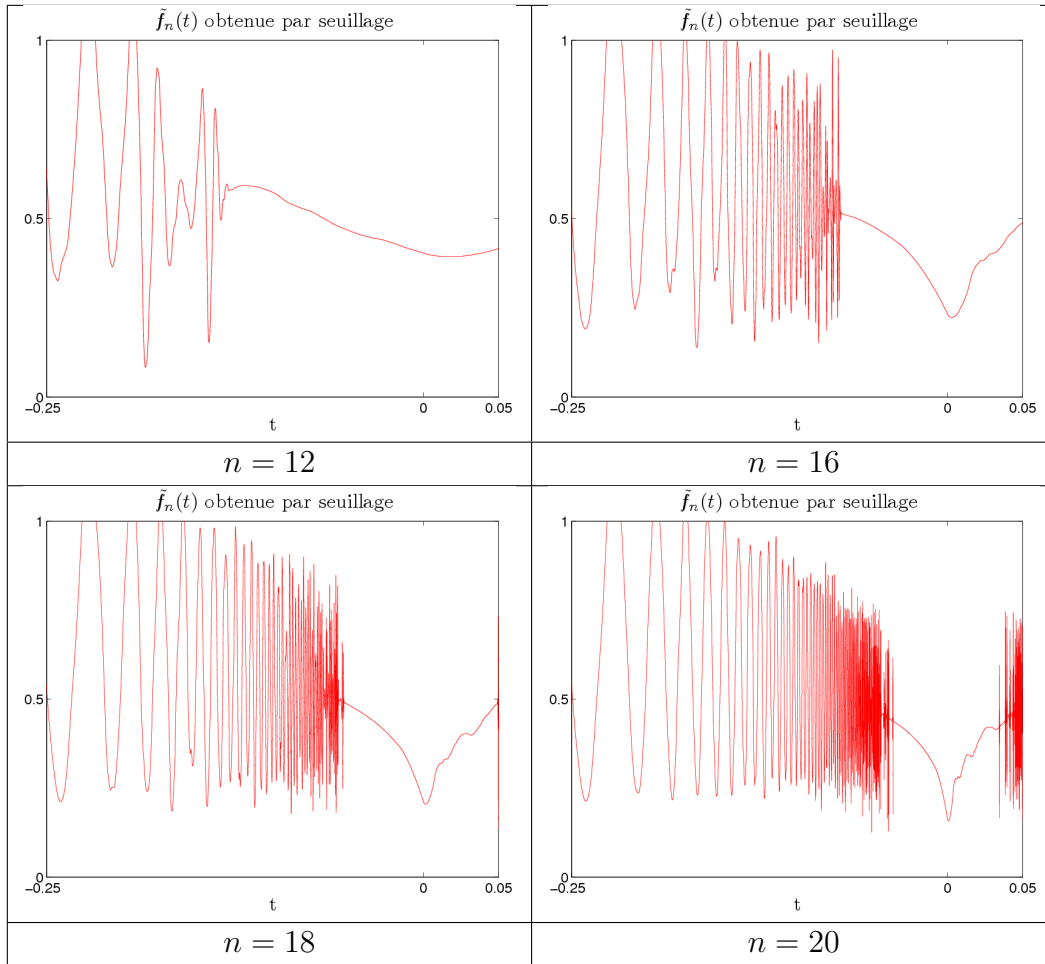


FIG. 5.16 – Signaux obtenus par seuillage des coefficients d’ondelette de la fonction bruitée.

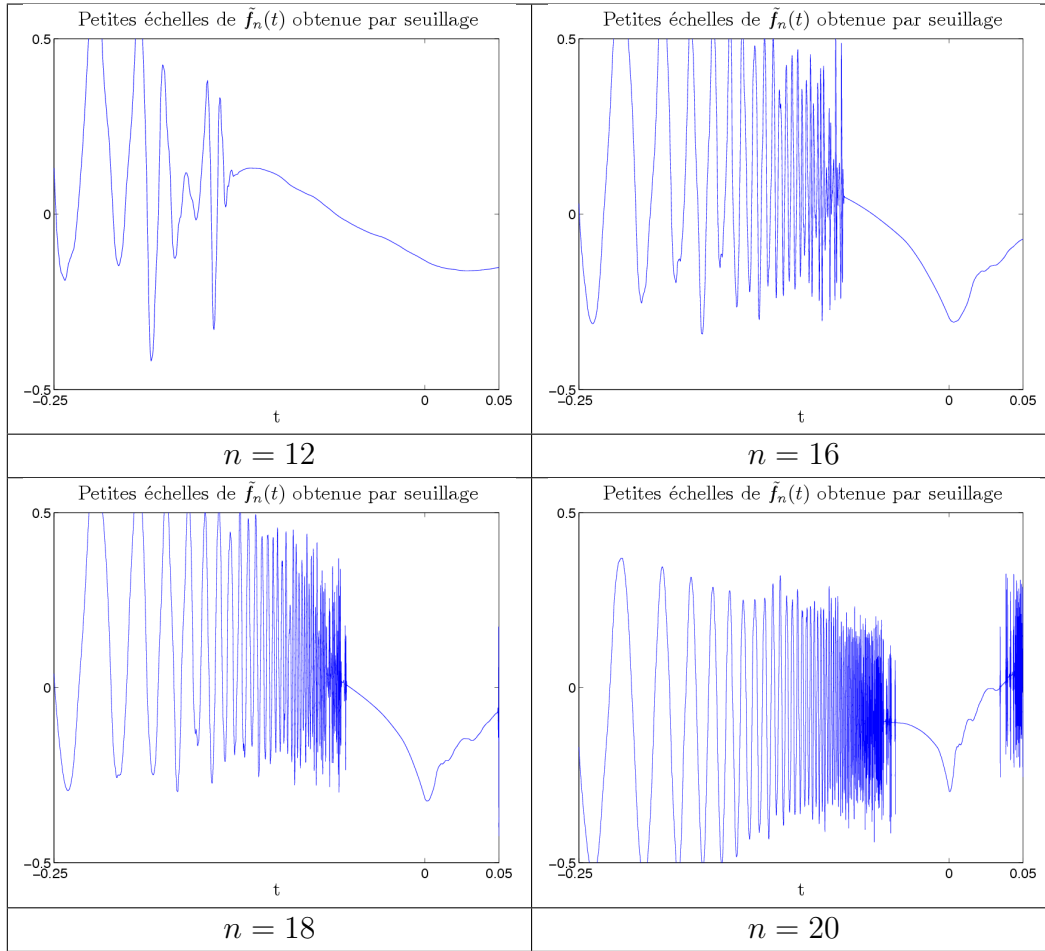


FIG. 5.17 – Petites échelles des signaux obtenus par seuillage des coefficients d'ondelette de la fonction bruitée.

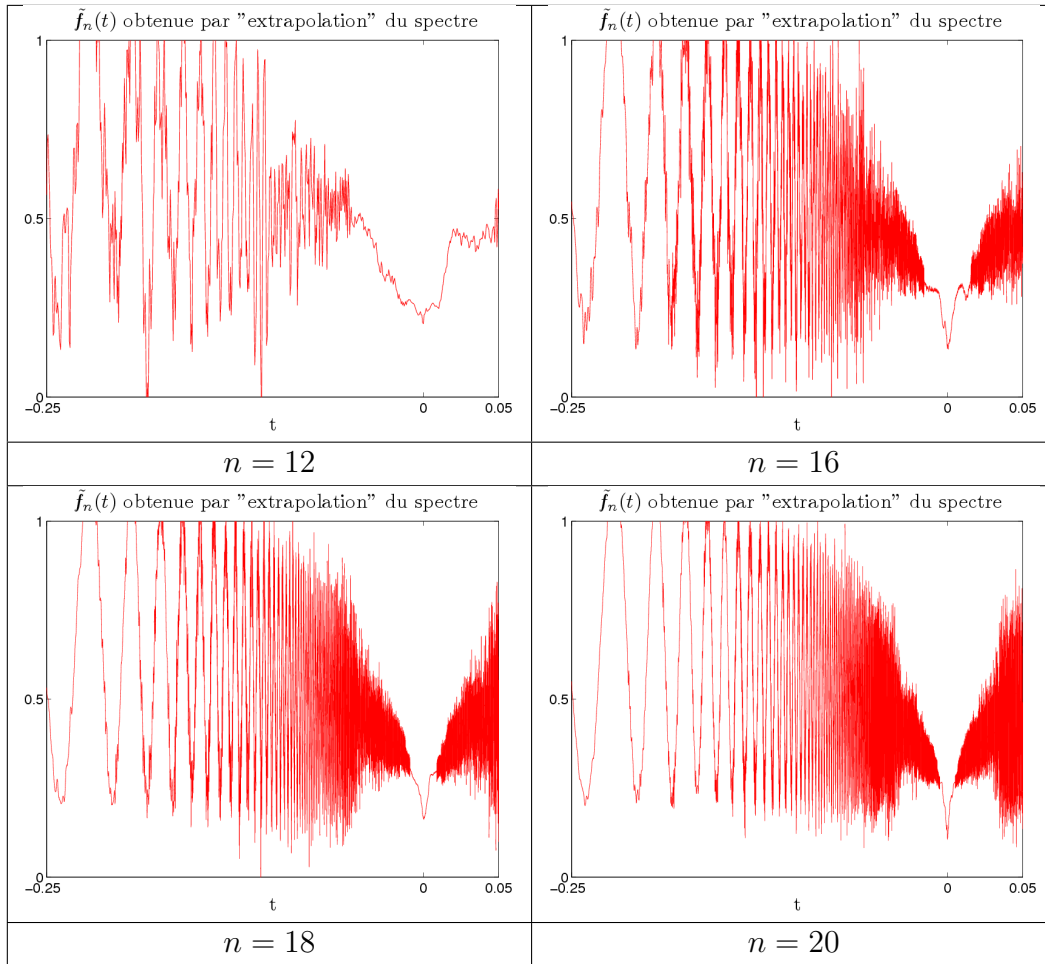


FIG. 5.18 – Signaux obtenus par "extrapolation" des coefficients d'ondelette de la fonction bruitée.



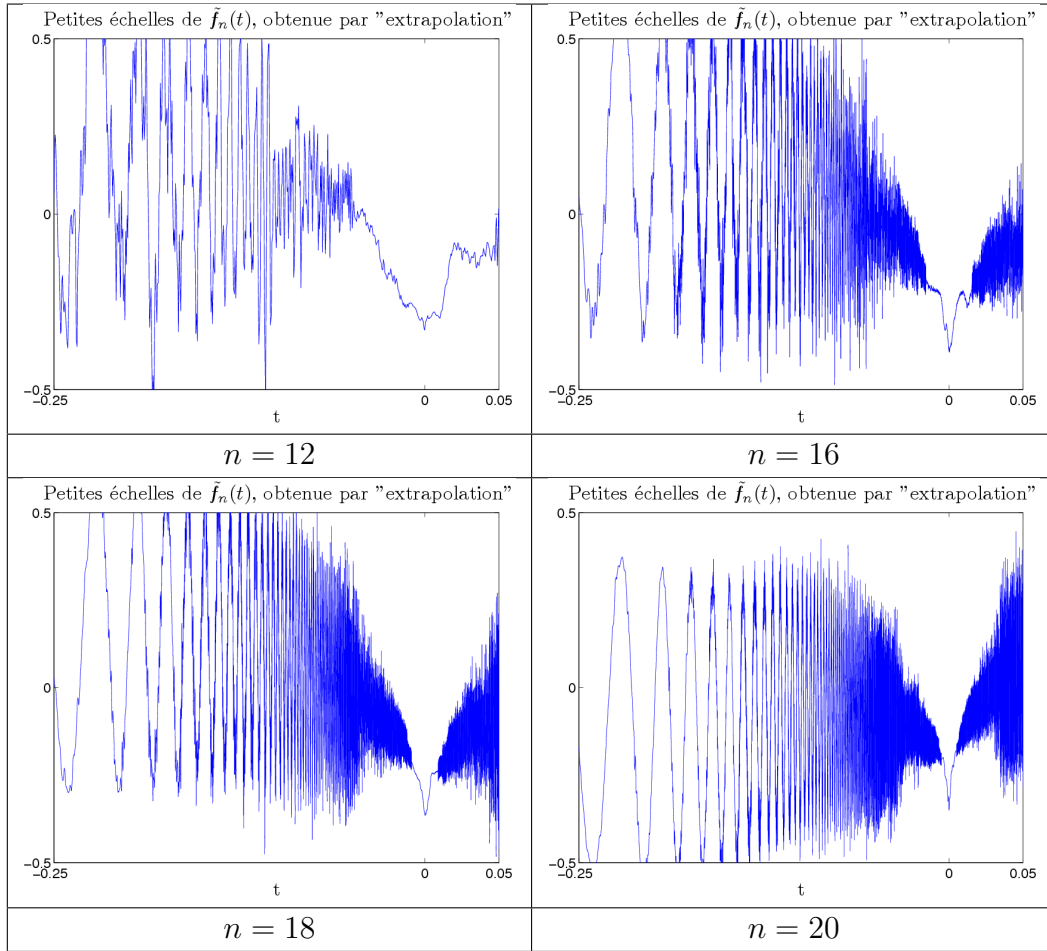


FIG. 5.19 – Petites échelles des signaux obtenus par "extrapolation" des coefficients d'ondelette de la fonction bruitée.

# Chapitre 6

## Application d'outils fractals à l'analyse d'images de beurre

De nombreuses caractéristiques du beurre, comme sa "tartinabilité", dépendent de la cristallisation, qui est observable sur les images microscopiques de matière grasse laitière. Comme la microstructure revêt souvent un aspect irrégulier, les outils fractals semblent particulièrement adaptés à l'étude de ces images. Dans ce chapitre, des techniques fractales reflétant la texture de l'image sont appliquées pour séparer le type, le site de production et le jour de maturation de différents beurres. Les images sont obtenues à partir de beurres produits dans des conditions industrielles. L'influence de la cristallisation a été observée sur ces paramètres fractals. Des corrélations prometteuses avec le jour de maturation ont été démontrées. De plus, il a été possible de séparer différents types de beurre et différents sites de production.

### 6.1 Introduction

De nombreux travaux sur la valorisation du lait sont axés vers le développement de moyens technologiques permettant d'améliorer les propriétés fonctionnelles et nutritionnelles de la matière grasse laitière. Les études visent la production de fractions à teneur réduite en cholestérol et en acides gras saturés pour la préparation de "laits santé", de beurres frigo-tartinables, de beurres allégés et de fractions à fonctionnalité améliorée pour des utilisations spécifiques (ex. boulangerie et chocolaterie).

Toutes ces propriétés dépendent principalement de la microstructure, qui est mesurée traditionnellement par la rhéologie mais peut être observée également sur des images microscopiques. Ces images présentent souvent un aspect irrégulier. L'utilisation d'outils fractals semble donc appropriée pour analyser ce type d'images.

Les travaux sur l'analyse fractale de la microstructure des gels et des matières grasses (beurre de coco, huiles, yaourts, fromages...) sont généralement fondés sur des modèles reliant les propriétés microscopiques et macroscopiques du matériau. Ainsi, Shih [SSK<sup>+</sup>90] développe un modèle qui relie les propriétés élastiques à une dimension fractale des flocons dans le gel colloïdal. Wu et Morbidelli [WM01] proposent une théorie d'échelle pour relier les paramètres structuraux avec les propriétés rhéologiques. Marangoni [MN02] évalue une dimension fractale des images microscopiques de la matière grasse afin de modéliser des propriétés élastiques. Dans ces articles, la dimension fractale figure comme paramètre dans le modèle analytique qui sert à estimer des propriétés rhéologiques.

Nous utilisons dans ce travail des techniques fractales indépendamment d'une modélisation fondée sur la rhéologie pour évaluer directement sur les images la cristallisation des matières grasses. Un avantage de cette méthode par rapport aux techniques classiques de pénétrométrie est sa plus grande légèreté de mise en oeuvre. De plus, elle est applicable dès le jour de fabrication du beurre. Les techniques de pénétrométrie classiquement utilisées pour évaluer la rhéologie ne peuvent, elles, être utilisées à cette date, à cause de la trop grande mollesse du beurre à ce moment-là. Nous avons étudié différents paramètres fractals, parmi lesquels les plus pertinents se sont avérés être la dimension de boîte, la dimension de régularisation, la lacunarité et les normes de Besov.

Ce chapitre est organisé comme suit : la section 2 expose le matériel et les méthodes d'acquisition employées, la section 3 présente de manière générale les paramètres fractals retenus pour l'étude, la section 4 énonce et discute les résultats obtenus, et la section 5 conclut ce chapitre.

## 6.2 Matériel et méthodes

Nous avons travaillé avec des images microscopiques de deux types de beurre : beurre croissant (utilisé comme son nom l'indique dans la préparation des croissants), et beurre Nizo. Le beurre Nizo est obtenu par une méthode de maturation continue de la crème. Il recouvre 90% de la production industrielle de beurre. Il a été prélevé des échantillons de ces deux types de beurre sur différents sites industriels (deux pour le beurre Nizo, trois pour le beurre croissant). Les échantillons sont prélevés sur les sites à la sortie des conditionneuses et transportés en contai-

ner isotherme jusqu'aux locaux de l'ENILIA<sup>1</sup>, organisme avec lequel nous avons mené ce travail. Les échantillons sont ensuite suivis pendant leur maturation qui dure 21 jours. Pour chaque type de beurre et chaque site, cinq images par jour correspondant à cinq champs visuels différents ont été acquises aux jours J0, J+1, J+7, J+14, J+21, où J0 est le jour de prélèvement du beurre. La procédure est répétée trois fois pour différentes épaisseurs de l'échantillon. Le grossissement du microscope est 400x (1 pixel  $\leftrightarrow$  1.18 $\mu$ m). Nous avons ainsi disposé de 60 images de taille 1104x812 pixels par beurre et par site.

Sur les images obtenues (Fig. 6.1), on constate la présence de cristaux en forme de croix de Malte (plus clairs), et d'une masse grise informe, correspondant à de la matière non cristallisée, ou bien à des cristaux superposés. Les cristaux sont particulièrement visibles sur les images de beurre croissant. Suivant les types de beurre, les cristaux sont plus ou moins grands et nets, tandis que, suivant le jour de maturation, la cristallisation progressant, la surface informe diminue et les cristaux deviennent plus grands et moins nombreux.

En résumé, les échantillons de beurre se différencient par : le type de beurre utilisé, son degré de maturation et son lieu de production. Nous avons cherché à faire apparaître ces différences en appliquant certains outils fractals.<sup>2</sup>

## 6.3 Présentation des outils fractals

### 6.3.1 Dimension de boîte

La dimension de boîte [Fal03] est un paramètre fractal classique qui permet de caractériser la manière dont un objet remplit l'espace. Elle a été calculée sur des images en noir et blanc (Les images noir et blanc sont obtenues par seuillage sur les images en niveaux de gris. Voir explications au paragraphe 6.4.1). Pour l'obtenir, on calcule une suite  $N(k)$  définie comme suit : Pour chaque  $k$ , on recouvre l'image d'un quadrillage de carrés de côté  $1/2^k$ , puis  $N(k)$  est le nombre de carrés non vides (c.a.d. qui contiennent au moins un pixel blanc).

La dimension de boîte mesure la vitesse à laquelle  $N(k)$  tend vers l'infini. Plus

---

<sup>1</sup>Ecole Nationale d'Industries Laitières et des Industries Agro-alimentaires. Site internet : <http://www.enilia.com>

<sup>2</sup>Tous ces outils sont disponibles dans la boîte à outils FRACLAB, téléchargeable à : <http://www.irccyn.ec-nantes.fr/irccyn/Projets/FracLab/FracLab.htm>

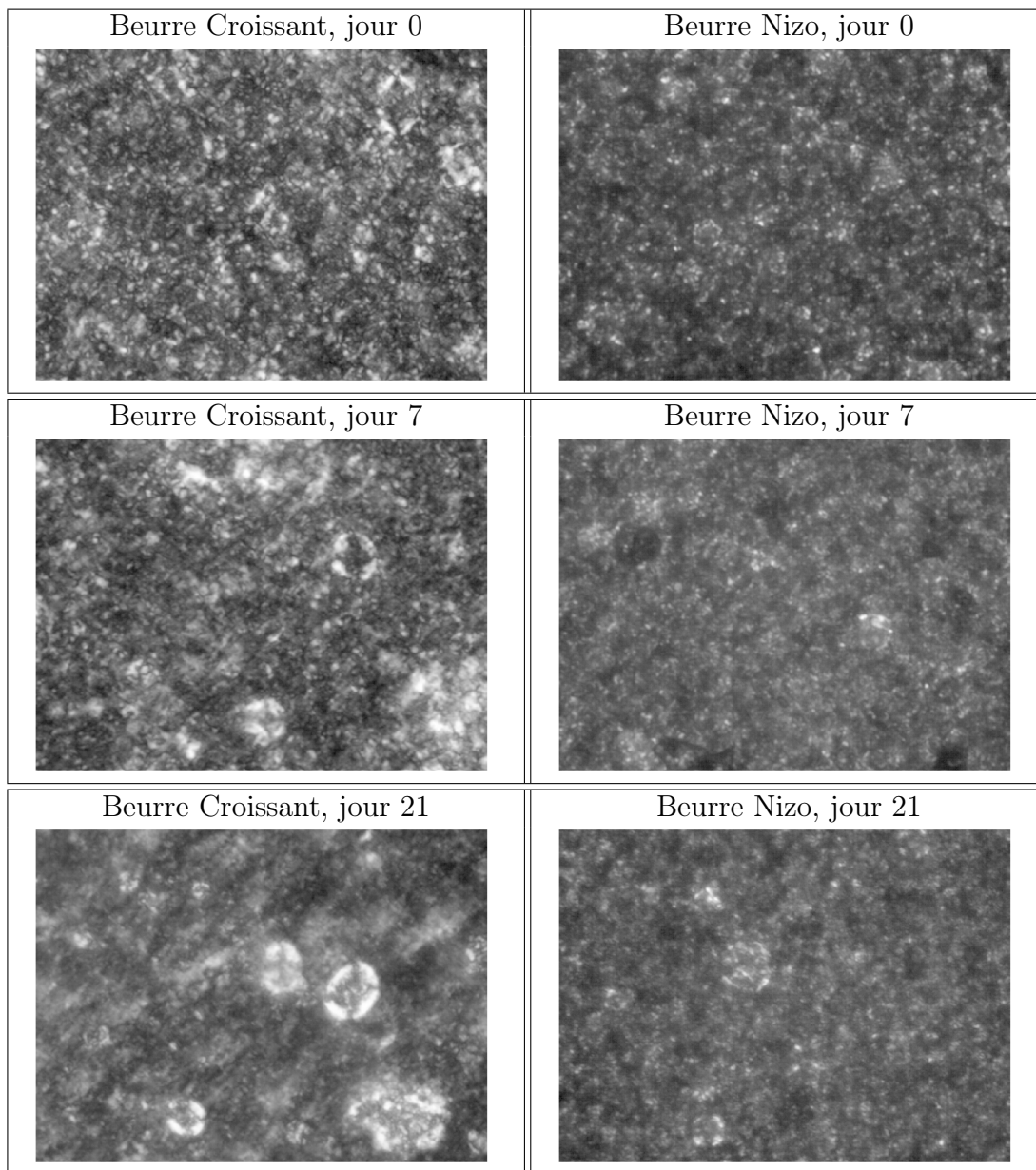


FIG. 6.1 – Images de beurre

précisément,  $N(k)$  est proportionnel à  $2^{kd}$ , où  $d$  est la dimension recherchée.

Le but étant d'évaluer  $d$ , on trace  $\log N(k)$  en fonction de  $\log k$  puis on détermine un intervalle sur lequel ce tracé semble affine.  $d$  est la pente de la droite obtenue.

Précisons que le même type de calcul peut aussi caractériser l'image en niveau de gris (i. e. en 3D), mais que les résultats n'ont pas été concluants dans l'application présentée ici.

### 6.3.2 Dimension de régularisation

Une autre dimension fractionnaire, appelée "dimension de régularisation" [RL98], a donné des résultats intéressants. Celle-ci n'a pas été calculée sur l'image binarisée, mais sur l'image en niveaux de gris. Le but n'est donc plus de caractériser la manière dont certains pixels remplissent l'image, mais plutôt d'obtenir une information sur la régularité de sa texture.

Soit  $I(x, y)$  l'image, où  $I(x, y)$  est le niveau de gris du pixel  $(x, y)$ .  $I$  est lissée par convolution avec, par exemple, un noyau gaussien  $K_\sigma$  de variance  $\sigma$ . Notons  $I_\sigma$  l'image régularisée  $I_\sigma = K_\sigma * I$ . Supposons que  $I$  est si irrégulière que la surface  $(x, y, I(x, y))$  de  $\mathbb{R}^3$  a une aire infinie.

Les images  $I_\sigma$  sont telles que pour tout  $\sigma > 0$ , leurs surfaces  $(x, y, I_\sigma(x, y))$  ont une aire finie  $S_\sigma$ . Quand  $\sigma$  tend vers 0,  $I_\sigma$  tend vers  $I$  et  $S_\sigma$  tend vers l'infini. La dimension de régularisation  $\dim_R$  mesure la vitesse de convergence de  $S_\sigma$  vers l'infini. Formellement :  $\dim_R = 2 + \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{\log(S_\sigma)}{-\log \sigma}$ , quand la limite existe (une limite inférieure est évaluée dans le cas contraire).

De manière analogue à la dimension de boîte, la dimension de régularisation est estimée par une régression linéaire de  $\log S_\sigma$  en fonction de  $\log \sigma$ .

### 6.3.3 Lacunarité

Deux images de même dimension fractionnaire peuvent différer énormément. La lacunarité [Lév90] est un paramètre fractal du second ordre qui décrit la texture d'une image. De même que la dimension de régularisation, nous l'avons appliquée sur l'image en niveaux de gris.

La lacunarité évalue l'homogénéité de la répartition des intensités lumineuses. Si on suppose l'image totalement homogène, l'intensité lumineuse  $m$  présente dans

une fenêtre de taille  $\epsilon$  est la même pour toutes les fenêtres. La lacunarité décrit la "dispersion" des intensités lumineuses réellement présentes dans ces fenêtres de taille  $\epsilon$  par rapport à  $m$  :  $L = \langle (\frac{m'}{m} - 1)^2 \rangle$  où  $m'$  est l'intensité lumineuse observée dans la fenêtre de taille  $\epsilon$ . Les crochets désignent la moyenne sur les fenêtres de taille  $\epsilon$ .

La lacunarité permet de mesurer la distribution de trous dans l'image : si celle-ci comporte de grands contrastes (à l'échelle  $\epsilon$ ), alors la lacunarité de l'image sera élevée. A l'inverse, si l'image est homogène, alors sa lacunarité sera faible.

### 6.3.4 Norme de Besov

Nous exposons le calcul en 1D pour plus de clarté. Soit  $X$  un signal dans  $L^2(\mathbb{R})$  et  $c_{jk}$  ses coefficients d'ondelettes sur une base ayant une régularité suffisante (voir [RL98] pour plus de détails). Alors  $X$  appartient à l'espace de Besov  $B_{p,q}^s$  si :

$$\|X\|_{B_{p,q}^s}^q = \sum_j \left[ 2^{j(s+1/2-1/p)} (\sum_k |c_{jk}|^p)^{1/p} \right]^q < \infty$$

Le paramètre  $s$  mesure la régularité du signal, et les paramètres  $p$  et  $q$  la manière de définir cette régularité.

## 6.4 Analyse et discussion

Sur les images, on observe des cristaux dont l'aspect varie avec le type de beurre et le stade de maturation. Les paramètres exposés dans la section 6.3 peuvent être interprétés comme reflétant certaines propriétés des cristaux telles que leur taille, leur densité, ou la quantité de matière non cristallisée.

Nous avons donc cherché à discriminer les différents groupes de beurres au moyen de paramètres fractals. L'intérêt de cette démarche est la suivante : un outil qui distingue les jours les uns de autres fournit un renseignement sur l'état de maturation du beurre, même en l'absence de modèle. De même, un outil qui distingue les beurres entre eux peut permettre de se rendre compte si un beurre n'est pas conforme à ce qu'on souhaite obtenir. Enfin, discriminer les sites de production peut permettre de mettre en évidence des variations de technologie ou de matières premières.

Chacun des paramètres précédemment exposés a été étudié dans le cadre de la séparation des beurres, des lieux de production et des jours de suivi. Nous

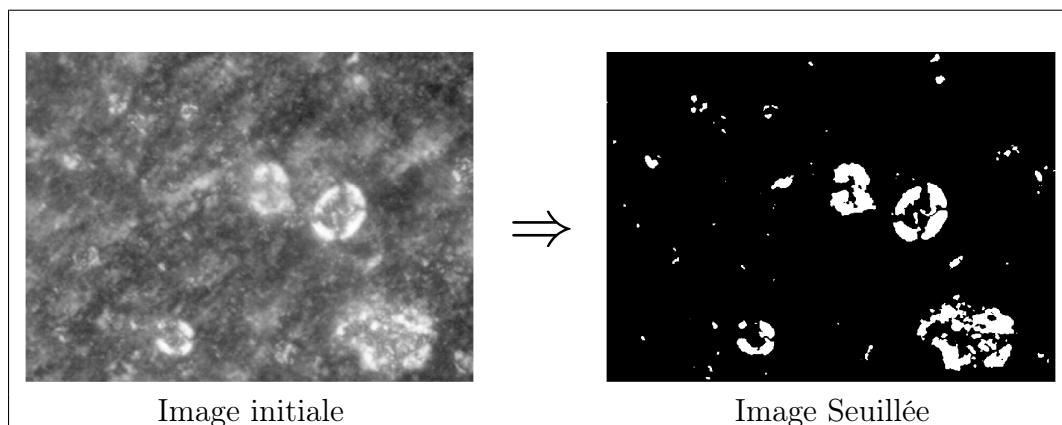


FIG. 6.2 – Exemple de seuillage

présentons ici les résultats les plus concluants : chaque paramètre permettait de séparer au mieux certains groupes.

#### 6.4.1 Evolution de la dimension de boîte avec la maturation

Avant de calculer cette grandeur, nous avons effectué un seuillage, le but étant d'obtenir des images où les pixels blancs correspondent à des cristaux, ces cristaux étant plus clairs que le fond. A cause du nombre d'images traitées, le seuil a dû être calculé automatiquement, ce qui est assez délicat : la luminosité moyenne et le contraste de l'image dépendent de l'éclairage lors de la photographie. Cet éclairage pouvant varier, il semble nécessaire que l'image binarisée dépende le moins possible de ces deux paramètres, c'est à dire qu'une variation de la luminosité ou du contraste de l'image en niveaux de gris ne modifie pas trop l'image binarisée. Une idée naturelle est alors de choisir le seuil comme la somme de la moyenne et d'un multiple de l'écart-type de la distribution des niveaux de gris.

Nous avons ainsi constaté qu'un seuil empirique fixé à la moyenne + 2 écarts-type permettait d'isoler assez bien la surface occupée par les cristaux. (Fig. 6.2) Nous avons vérifié sur un grand nombre d'images que ce type de seuillage donnait des résultats satisfaisants.

Sur les images des premiers jours, les cristaux sont plutôt petits et uniformément distribués. Vue de loin, l'image peut apparaître comme entièrement remplie



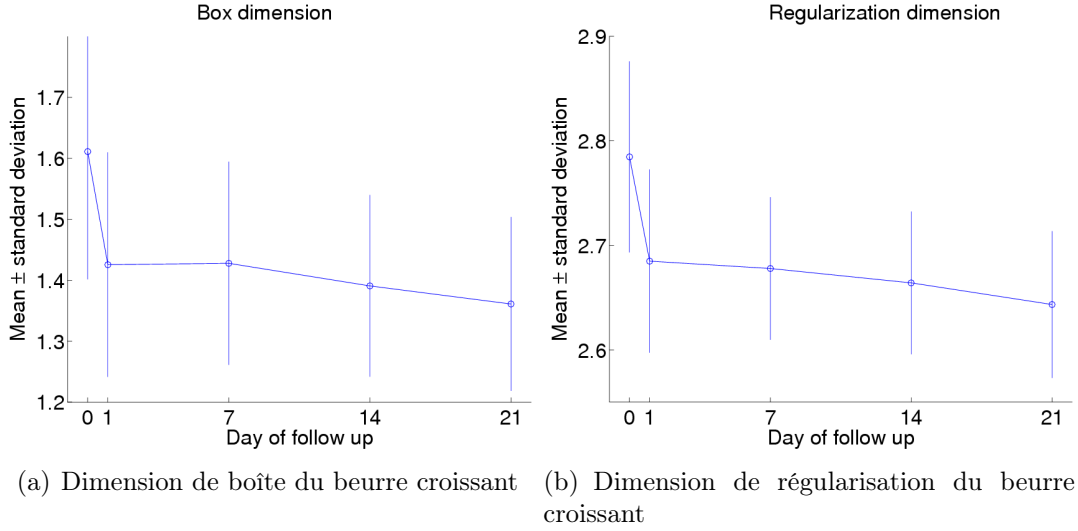


FIG. 6.3 – Evolution en fonction du jour

de cristaux. Quand les cristaux s'agrègent, leur surface augmente, mais il se trouve plus d'espace entre eux, et, à condition de regarder toujours l'image d'assez loin, ils apparaissent alors plus comme des "points".

La dimension de boîte permet de distinguer ces changements. En simplifiant, si de petits cristaux sont répartis partout dans l'image, toutes les boîtes vont être pleines, donc  $N(k)$  va évoluer comme  $2^{2k}$  tandis que si on a juste quelques cristaux isolés dans l'image dont la taille reste inférieure à celle des boîtes, on aura toujours une boîte non vide par cristal et  $N(k)$  sera constant, égal au nombre de cristaux. La situation réelle n'est pas aussi marquée, mais on a pu effectivement constater une tendance décroissante de cette grandeur avec le jour (Fig 6.3(a)). Précisons que les images analysées sont celles de beurres préparés dans des conditions industrielles. Les résultats sont représentatifs, chaque moyenne étant évaluée sur 180 images (pour les trois sites), malgré des barres d'erreur relativement fortes.

#### 6.4.2 Evolution de la dimension de régularisation avec la maturation du beurre

Pendant la maturation du beurre, on observe la formation de nouveaux cristaux, l'agrégation de cristaux déjà existants et la diminution de la surface informe. Les cristaux étant une partie plutôt régulière de l'image, contrairement à la surface informe, l'irrégularité de l'image diminue au cours du temps. La dimension de

régularisation doit donc diminuer avec la cristallisation du beurre. Les résultats sur le beurre croissant Fig. 6.3(b) montrent que la dimension de régularisation est bien corrélée avec la maturation du beurre, et décroît avec le temps. De même que précédemment, les résultats sont représentatifs étant donné le grand nombre d'images analysées (180 par jour).

### 6.4.3 Séparation des types de beurre avec la lacunarité

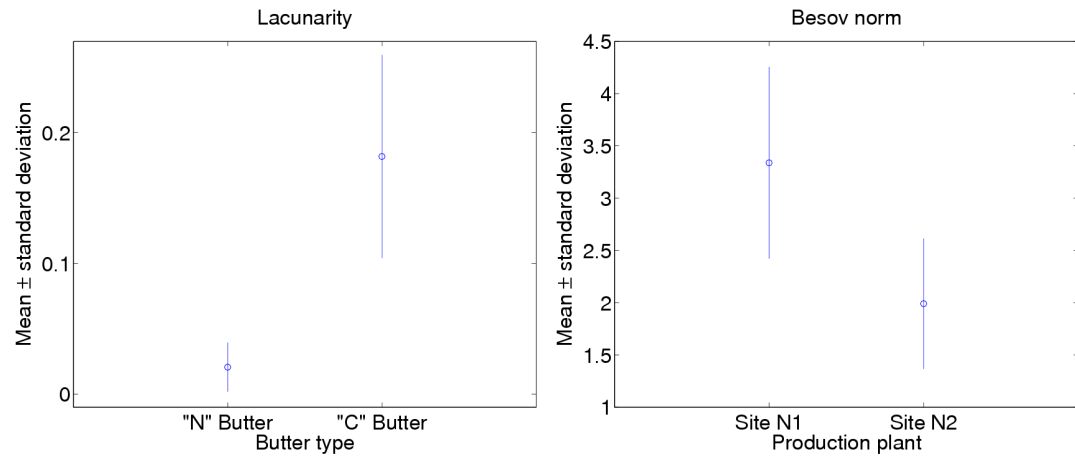
La lacunarité, du fait qu'elle évalue l'homogénéité de la texture de l'image, permet de séparer les deux types de beurre : les images du beurre croissant présentent beaucoup de vides et ne sont pas homogènes, à cause de la présence de gros cristaux en forme de croix de Malte. En comparaison, les images du beurre Nizo sont beaucoup plus homogènes. Les valeurs de la lacunarité sont alors beaucoup plus faibles pour le beurre croissant que pour le beurre Nizo. La figure 6.4(a) montre que la lacunarité sépare parfaitement les deux types de beurre sur tous les échantillons (Environ 360 par type de beurre) et pour tous les sites. De plus, on constate que la concentration des échantillons est faible pour les valeurs de lacunarité proche de la valeur critique  $L = 0.06$ . La lacunarité apparaît donc comme réellement adaptée à la séparation du type de beurre.

### 6.4.4 Norme de Besov et site de production

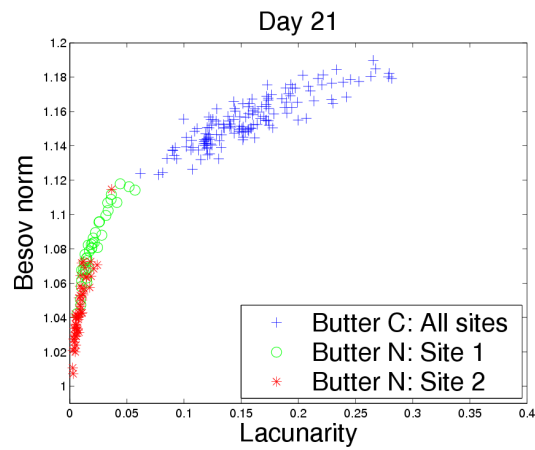
La séparation des différents sites industriels a été effectuée en utilisant la norme de Besov des images dans des espaces de Besov bien choisis [DeV98b].

Le choix de ces espaces s'est effectué ainsi : Nous avons calculé la norme de Besov dans 45 espaces différents (pour  $s = 0.3, 0.4, 0.5$  ;  $p = 1, 2, 3$  ;  $q = 1, 2, 3$ ) puis, après avoir constaté que ces normes formaient deux groupes de résultats à l'intérieur desquels les corrélations étaient très fortes, nous avons gardé un représentant du groupe qui permettait de discriminer au mieux les deux sites (Il s'agissait de la norme de Besov calculée pour  $s = 0.5$  ;  $p = 1$  ;  $q = 1$ ).

Nous avons pu séparer les sites produisant le beurre Nizo (voir figure 6.4(b)), mais pas le beurre croissant. Les résultats se sont ainsi révélés complémentaires des résultats de pénétrométrie : avec des outils statistiques de type analyse en composantes principales sur les mesures classiques de pénétrométrie, il a été possible de séparer les sites de production du beurre croissant, mais pas ceux du



(a) Influence du type de beurre sur la lacunarité (b) Impact du site de production sur la norme de Besov



(c) Représentation des beurres en fonction de la lacunarité et de la norme de Besov

FIG. 6.4 – Séparation du type de beurre et du site de production

beurre Nizo. Les normes de Besov se sont avérées également pertinentes en combinaison avec d'autres paramètres fractals. Ainsi, la figure 6.4(c) présente la classification par site et par type de beurre en fonction de la lacunarité et des normes de Besov ; ce critère combiné a permis de séparer avec succès à la fois le beurre croissant du beurre Nizo, et les beurres Nizo entre eux selon le site industriel où ils ont été fabriqués. Nous avons étudié différentes combinaisons de facteurs, mais c'est couplée à la lacunarité que la norme de Besov permet de discriminer au mieux les différents groupes. L'intérêt de cette séparation est par exemple de détecter les beurres qui ne seraient pas conformes à ce que l'on souhaite.

## 6.5 Conclusion

En conclusion, les techniques fractales semblent être bien adaptées pour évaluer la maturation des beurres Nizo et croissant, séparer ces deux types de beurre, et discriminer les sites industriels où sont produits les beurres Nizos. Contrairement aux méthodes de pénétrométrie, les résultats sont disponibles immédiatement ; nous pouvons ainsi quantifier le stade de cristallisation dès le premier jour de maturation. De plus, les techniques d'analyse d'images sont plus faciles à mettre en oeuvre.

## Remerciements

Nous remercions Franck Sobolewski et Sophie Breau, de l'ENILIA Surgères, pour les images de beurre et les discussions et commentaires précieux dont ils nous ont fait part.

# Chapitre 7

## Conclusion et perspectives

L'apport de cette thèse se répartit dans les domaines suivants : étude en temps des espaces 2-microlocaux, rapprochement de l'analyse multifractale et de l'analyse 2-microlocale, élaboration de nouvelles méthodes de débruitage et étude d'images agro-alimentaires au moyen de descripteurs de texture.

L'utilisation du spectre 2-microlocal en temps permet de calculer informatiquement et de manière assez stable la frontière 2-microlocale d'un signal. L'application des méthodes exposées dans cette thèse à des signaux réels présentant des irrégularités pourrait ainsi apporter une description précise de ces irrégularités. Le spectre 2-microlocal en temps pourrait donc se révéler utile pour la description et la caractérisation d'images ou de signaux réels. Nous espérons également que les méthodes employées dans les exemples de calcul littéral faciliteront le calcul littéral de frontières 2-microlocales d'autres signaux théoriques.

Le rapprochement de l'analyse multifractale et de l'analyse 2-microlocale a permis de faire surgir un cadre commun dans lequel ces deux formalismes sont présentables de façon claire. Le théorème 4.1 reste à compléter, afin de mieux cerner les hypothèses éventuelles à rajouter pour que la conclusion reste vraie dans le cas  $q = 0$ . Il serait également intéressant, ainsi que suggéré dans [LTar], d'explorer des spectres définis par des sommes sur les coefficients d'ondelette plutôt que par des bornes supérieures. Ceci pourrait amener une plus grande stabilité dans les calculs numériques de spectre.

Les nouvelles méthodes de débruitage exposées dans cette thèse n'ont pas encore été utilisées sur des signaux réels. Elles pourraient s'avérer efficaces sur des signaux réels texturés. Certaines de ces méthodes permettent de retrouver en un point donné la frontière 2-microlocale du signal initial. La recherche d'une méthode permettant de retrouver *en tout point* la frontière 2-microlocale du signal initial est une piste particulièrement intéressante.

Enfin, l'application de descripteurs de texture aux images microscopiques de

beurre a permis de séparer les différents types de beurres et d'évaluer leur maturation. L'étape suivante serait de prédire l'état final du beurre à partir de descripteurs de texture d'image.

# Chapitre 8

## Bibliographie

- [AAM98] S. Jaffard A. Arneodo, E. Bacry and J.F. Muzy. Singularity spectrum of multifractal functions involving oscillating singularities. *J. Fourier Analysis App.*, 4 :159–174, 1998.
- [ABS01] A. Antoniadis, J. Bigot, and T. Sapatinas. Wavelet estimators in nonparametric regression : a comparative simulation study. *J. Statist. Software* 6, 6 :1–83, 2001.
- [Aka] Uma Ranjan Akash. Classification of objects in sar images using scaling features.
- [AP96] Matthias Arbeiter and Norbert Patzschke. Random self-similar multifractals. *Math. Nachr.*, 181 :5–42, 1996.
- [AS70] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover, New York, 1970.
- [BL04] Julien Barral and Jacques Lévy Véhel. Multifractal analysis of a class of additive processes with correlated nonstationary increments. *Electronic Journal of Probability*, 9 :508–543, 2004.
- [BMP92] G. Brown, G. Michon, and J. Peyrière. On the multifractal analysis of measures. *J. Statist. Phys.*, 66(3-4) :775–790, 1992.
- [Bon83] J.M. Bony. Propagation et interaction des singularités pour les solutions des équations aux dérivées partielles non-linéaires. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 1133–1147, 1983.
- [Bon86] Jean-Michel Bony. Second microlocalization and propagation of singularities for semilinear hyperbolic equations. In *Taniguchi Int. Symp., Katata and Kyoto/Jap. 1984*, pages 11–49, 1986.
- [CD95] R. Coifman and D. Donoho. *Translation invariant de-noising*, pages 125–150. Springer-Verlag, 1995.
- [CJ92] R. Chhabra and R.V. Jensen. On the multifractal analysis of measures. *J. Statist. Phys.*, 66(3-4) :775–790, 1992.
- [CLP87] P. Collet, J.L. Lebowitz, and A. Porzio. The dimension spectrum of some dynamical systems. *J. Stat. Phys.*, 47 :609–644, 1987.

- [CS00] R. R. Coifman and A. Sowa. Combining variational calculus and wavelets for image enhancement. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, 9 :1–18, 2000.
- [DDVD98] R. Devore, D. Donoho, M. Vetterli, and I. Daubechies. Nonlinear approximation. *Acta Numerica*, 7 :51–150, 1998.
- [Dev98a] Devore. Data compression and harmonic analysis. *IEEE Transactions on Information Theory Numerica*, 44 :2435–2467, 1998.
- [DeV98b] R.A. DeVore. Nonlinear approximation. *Acta Numerica*, pages 1–99, 1998.
- [DF03] S. Durand and J. Froment. Reconstruction of wavelet coefficients using total variation minimization. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 24(5) :1754–1767, 2003.
- [DKT96] D. Picard D. Kerkycharian and K. Tribouley.  $l_p$  adaptative density estimation. *Bernouilli*, 2 :229–247, 1996.
- [DL92] R.A. Devore and B. Lucier. Fast wavelet techniques for near optimal image processing. *IEEE Military Communications Conference*, 2–12, 1992.
- [DLVM98] K. Daoudi, J. Lévy Véhel, and Y. Meyer. Construction of continuous functions with prescribed local regularity. *Constr. Approx.*, 14(3) :349–385, 1998.
- [Don94] D.L. Donoho. De-noising by soft-thresholding. *IEEE Trans. Inf. Theory* 41, pages 613–627, 1994.
- [Don95] David L. Donoho. De-noising by soft-thresholding. *IEEE Transactions on Information Theory*, 41(3) :613–627, 1995.
- [DTL<sup>+</sup>06] M.F. Devaux, I. Taralova, J. Lévy Véhel, E. Bonnin, J.F. Thibault, and F. Guillon. Contribution of image analysis to the description of enzymatic degradation kinetics for particulate food material. *Journal of Food Engineering*, pages 77 (4) 1096–1107, 2006.
- [EM92] C. J. G. Evertsz and B.B Mandelbrot. Multifractal measures. In *Chaos and Fractals : New Frontiers in Science*, pages 921–953. Springer-Verlag, 1992.
- [Fal03] Kenneth Falconer. *Fractal geometry - Mathematical foundations and applications*. John Wiley, 2003.
- [Fan97] A.H. Fan. Multifractal analysis of infinite products. *J. Stat. Phys.*, 86(5/6) :1313–1336, 1997.
- [FP85] U. Frisch and G. Parisi. Fully developped turbulence and intermitency. In *Proc. International Summer school Phys., Enrico Fermi*, 84–88, North Holland, 1985.



- [GL98] B. Guiheneuf and J. Lévy Véhel. 2-microlocal analysis and application in signal processing. In *International Wavelets Conference (Tangier)*. Inria, April 1998.
- [GU85] Parisi G. and Frisch U. On the singularity spectrum of fully developed turbulence. In *Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics*, pages 84–87. North Holland, 1985.
- [GV67] I. Guelfand and Y. Vilenkin. *Applications de l’analyse harmonique*, volume 4. Les distributions. Dunod, 1967.
- [Har16] G. H. Hardy. Weierstrass’s non-differentiable function. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 17 :301–325, 1916.
- [HJK<sup>+</sup>86] T.C. Halsey, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, and B. I. Shraiman. Fractal measures and their singularities : The characterization of strange sets. *Phys. Rev. A*, 33(2) :1141–1151, 1986.
- [Jaf89] S. Jaffard. Exposants de hölder en des points donnés et coefficients d’ondelettes. *Comptes rendus de l’Académie des Sciences - Série I*, 308 :79–81, 1989.
- [Jaf91] S. Jaffard. Pointwise smoothness, 2-microlocalization and wavelet coefficients. *Publ. Mat.*, 35 :155–168, 1991.
- [Jaf97a] S. Jaffard. Multifractal formalism for functions, parts i and ii. *SIAM J. Math. Analysis*, 28(4) :944–998, July 1997.
- [Jaf97b] Stephane Jaffard. Multifractal formalism for functions ii : selfsimilar functions. *SIAM J. Math. Anal.*, 28(4) :971–998, 1997.
- [Jaf04] Stephane Jaffard. Wavelet techniques in multifractal analysis. In *Wavelet and multifractal analysis, Institut d’Etudes Scientifiques de Cargèse*, Corsica, 2004.
- [KL02] K. Kolwankar and J. Lévy Véhel. A time domain characterization of the fine local regularity of functions. *J. Fourier Analysis App.*, 8 :319–334, 2002.
- [KP76] J.-P. Kahane and J. Peyrière. Sur certaines martingales de Benoît Mandelbrot. *Adv. in Math.*, 22 :131–145, 1976.
- [LL03] P. Legrand and J. Lévy Véhel. Local regularity-based image denoising. In *IEEE International Conference on Image Processing*, September 14–17 2003.
- [LLR83] M. R. Leadbetter, Georg Lindgren, and Holger Rootzén. *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*. Springer, 1983.
- [LR97] Jacques Lévy Véhel and R. Riedi. Fractional brownian motion and data traffic modelling : the other end of the spectrum. In Lévy Véhel, J. Lutton, and C. Tricot, editors, *Fractals in Engineering*. Springer Verlag, 1997.

- [LS04] J. Lévy Véhel and S. Seuret. The 2-microlocal formalism. *Fractal Geometry and Applications : A Jubilee of Benoit Mandelbrot, Proc. Sympos. Pure Math*, 2004.
- [LTar] J. Lévy Véhel and C. Tricot. On various multifractal spectra. *Fractals and Stochastics III, Birkhäuser*, to appear.
- [LTWW94] Will E. Leland, Murad S. Taqqu, Walter Willinger, and Daniel V. Wilson. On the self-similar nature of ethernet traffic (extended version). *IEEE/ACM Trans. Netw.*, 2(1) :1–15, 1994.
- [Lév90] J. Lévy Véhel. About lacunarity, some links between fractal and integral geometry and an application to texture segmentation. *ICCV*, 90 :380–384, 1990.
- [Lév96] Jacques Lévy Véhel. Numerical computation of the large deviation spectrum. In *CFIC*, Roma, 1996.
- [Lév97] Jacques Lévy Véhel. *Introduction to the multifractal analysis of images*. Springer Verlag, 1997.
- [LV98] Jacques Lévy Véhel and Robert Vojak. Multifractal analysis of choquet capacities : preliminary results. *Advances in Applied Math.*, 20(1) :1–43, January 1998.
- [LVT04] J. Lévy Véhel and C. Tricot. On various multifractal spectra. In C. Bandt, U. Mosco, and M. Zähle, editors, *Fractal Geometry and Stochastics III*, Progress in Probability, pages 23–42. Birkhauser Verlag, 2004.
- [LVV98] J. Lévy Véhel and R. Vojak. Multifractal analysis of choquet capacities : Preliminary results. *Adv. in Appl. Maths*, 20(1) :1–43, January 1998.
- [Mal98] S. Mallat. *A wavelet tour of signal processing*. Academic Press, 1998.
- [Man74a] Benoît Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid. Mech.*, 62 :331–358, 1974.
- [Man74b] B.M. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.*, 62 :331–358, 1974.
- [Mey90a] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs*. Hermann, 1990.
- [Mey90b] Y. Meyer. *Ondelettes et opérateurs, I : Ondelettes, II : Opérateurs de Calderón-Zygmund, III : Opérateurs multilinéaires*. Hermann, 1990.
- [Mey98] Y. Meyer. Wavelets, vibrations and scaling. *American Mathematical Society*, 9, 1998.
- [MN97] P. Mannersalo and I. Norros. Multifractal analysis of real atm traffic : a first look, 1997.

- [MN02] Alejandro Marangoni and Suresh Narine. Identifying key structural indicators of mechanical strength in networks fat crystals. *Food Research International*, 2002.
- [MSK03] Y. Meyer, O. Stiedl, and B. Kerman. Discrimination by multifractal spectrum estimation of human heartbeat interval dynamics. *Fractals-Complex Geometry Patterns and Scaling in Nature and Society*, pages 195–204, 2003.
- [Nie98] O. M. Nielsen. *Wavelets in scientific computing*. PhD thesis, Department of Mathematical Modelling Technical university of Denmark, 1998.
- [Nor97] I. Norros. Four approaches to the fractional brownian storage. *Fractals in Engineering*, pages 154–169, 1997.
- [Ols95] L. Olsen. A multifractal formalism. *Adv. Math.*, 116 :92–195, 1995.
- [Pet95] V. Petrov. *Limit Theorems of Probability Theory*. Oxford Science Publication, 1995.
- [PLD04] J. Lévy Véhel P. Legrand and M.-T. Do. Fractal properties and characterization of road profiles. In *FRACTAL04, Complexity and Fractals in Nature, 8th International Multidisciplinary Conference*, April 2004.
- [PPL02] Beatrice Pesquet-Popescu and Jacques Lévy Véhel. Stochastic fractal models for image processing. *IEEE Signal Processing*, pages 48–62, September 2002.
- [PT00] D. Picard and K. Tribouley. Adaptive confidence interval for pointwise curve estimation. *Annals of Statistics*, 28(1) :298–335, 2000.
- [RL98] F. Roueff and J. Lévy Véhel. A regularization approach to fractional dimension estimation. *Fractals* 98, 1998.
- [Seu03] S. Seuret. *Analyse de régularité locale, quelques applications à l'analyse multifractale*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, 2003.
- [SL03] S. Seuret and J. Lévy Véhel. A time-domain characterization of 2-microlocal spaces. *J. Fourier An. Appl.*, 9 :263–276, 2003.
- [SN96] G. Strang and T. Nguyen. *Wavelets and filter banks*. Wellesley-Cambridge Press, 1996.
- [SSK<sup>+</sup>90] W. D. Shih, W. Y. Shih, S.I. Kim, Liu J., and I.A. Aksay. Scaling behavior of the elastic properties of colloidal gels. *Physical Review A*, 42(8) :4772–4779, 1990.
- [TP00] Antonio Turiel and Nestor Parga. The multifractal structure of contrast changes in natural images : from sharp edges to textures. *Neural Computation*, 12(4) :763–793, 2000.

- [WM01] H. Wu and M. Morbidelli. A model relating structure of colloidal gels to their elastic properties. *Langmuir*, 17 :1030–1036, 2001.
- [Wol04] Philippe Wołoszyn. Fractal scattering indicators for urban sound diffusion. In NOVAK Miroslav M, editor, *Thinking in patterns : fractals and related phenomena in nature*, pages pp. 221–232, Singapore, 2004. World Scientific Publishing.